풀이

STEP I 1999, 문제 8

순수수학 • 조화급수의 한계

STEP I 1999, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q8

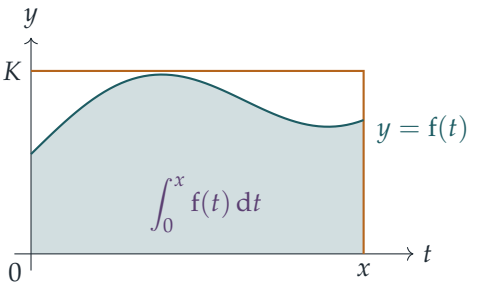
핵심 아이디어

적분(integral)은 넓이이므로, 곡선을 직사각형 안에 가두면 그 넓이도 0과 직사각형의 넓이 사이에 갇힌다. 문제에서 제시한 피적분함수(integrand)는 부분분수(partial fractions)로 분해되어, 그 적분이 정확히 $\ln(\frac{n}{n-1}) - \frac{1}{n}$이 되는 꼴이 되고, 피적분함수에 대한 범위로부터 부등식을 얻는다. 그다음에는 모든 것이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). n에 대하여 더하면 로그들의 사슬은 $\ln N$이 되고, 역수의 차들의 사슬은 거의 아무것도 남지 않는다.

풀이

적분의 범위 잡기

$0 \le t \le x$에서 $y = \mathrm{f}(t)$의 그래프를 그려 보자. $0 \le \mathrm{f}(t) \le K$이므로, 곡선 전체가 꼭짓점이 $(0,0)$과 (x,K)인 직사각형 안에, t축 위 또는 그보다 위쪽에 놓인다.



적분은 곡선 아래 색칠한 부분의 넓이이다. 곡선이 축 아래로 내려가는 일이 없으므로 이 넓이는 음수가 될 수 없고, 영역이 직사각형 안에 있으므로 직사각형의 넓이 Kx를 넘을 수 없

다. 따라서

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le Kx.$$

$\ln(\frac{n}{n-1})$에 대한 부등식

$n > 1$이라 하자. $0 \le t \le 1$에서 $n - t \ge n - 1 > 0$이므로 피적분함수가 정의된다. 이를 부분분수로 분해하면

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\Big]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n}.$$

이제 $[0,1]$에서 피적분함수의 범위를 잡는다. 분자 t는 음이 아니고 분모 $n(n-t)$는 양수이므로, 피적분함수는 0 이상이다. t가 0에서 1로 증가하면 분자는 커지고 양수인 분모는 작아지므로, 피적분함수는 증가하고 최댓값은 $t = 1$에서 갖는다.

$$0 \le \frac{t}{n(n-t)} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

첫 번째 결과에 $x = 1, K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$을 적용하면

$$0 \le \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$n = 2$부터 N까지 더하기

$n = 2, 3, \ldots, N$ (단, $N \ge 2$)에 대한 부등식을 모두 더한다. 로그들은 연쇄적으로 소거되는데, 이는

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1}\Big) = \ln N,$$

이기 때문이고, 우변들도 마찬가지이다.

$$\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 - \frac{1}{N}.$$

따라서

$$0 \le \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{N} \le 1.$$

($N = 1$일 때는 합이 비어 있고 $\ln 1 = 0$이므로, 이 경우에도 명제가 성립한다.)

생각해 보기 이 이중 부등식의 어느 쪽 절반이 조화급수(harmonic series)가 발산(diverge)함을 알려 주고, 어느 쪽 절반이 상계(upper bound)를 주는가?

왼쪽 절반은 합이 $\ln N$ 이하라는 것이고, 오른쪽 절반은 합이 $\ln N - 1$ 이상이라는 것이다. 발산을 보이려면 하계(lower bound)가 필요하므로 오른쪽 절반을 사용한다.

발산

$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1$로부터 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N - 1$을 얻고, 여기에 $n = 1$인 항을 더하면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

$N \to \infty$일 때 $\ln N \to \infty$이므로, 합도 무한대로 발산한다.

$N < 10^{30}$일 때의 범위

이제 왼쪽 절반을 사용한다. $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln N$이므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N.$$

$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$이므로, 양변을 열 제곱하면 $10^{30} < 2^{100}$이다. 따라서 $N < 10^{30}$이면 $N < 2^{100}$이고, ln은 증가함수이므로

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

이다. 여기서 $2 < \mathrm{e}$이므로 성립하는 $\ln 2 < 1$을 사용했다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N < 101.$$

검산

- $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값은 $n > 1$인 여러 값에 대하여 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$과 일치한다. 예를 들어 $n = 2$이면 둘 다 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$이고, 이는 0과 $\frac{1}{2}$ 사이에 있다.
- 2×10^5 이하의 모든 N에 대하여 $\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$은 $[0, 1]$에 속한다. $N = 2 \times 10^5$일 때 이 값은 약 0.4228로, $1 - \gamma \approx 0.4228$에 가깝다. 여기서 γ는 오일러(Euler) 상수(Euler's constant)이다.
- 이 범위는 넉넉하다. $1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$이고, 실제로 $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$이다. 조화급수는 발산하지만, 극도로 느리게 발산한다.

흔한 실수

- 이중 부등식의 엉뚱한 쪽 절반을 사용하는 것: 발산을 보이려면 합의 **하계**가 필요하고, 마지막 부분에는 **상계**가 필요하다.
- $n = 1$인 항을 빠뜨리는 것: 부등식은 $\sum_{n=2}^{N}$에 관한 것이지만, 결론은 $\sum_{n=1}^{N}$에 관한 것이다.
- 피적분함수의 최댓값이 $t = 1$에서 나타난다는 것을 정당화하지 않는 것. 피적분함수가 증가한다고 말하는 것(또는 단순히 $t \leq 1$이고 $n - t \geq n - 1$이라고 말하는 것)이면 충분하다.

STEP 너머

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$은 감소하고 아래로 유계이므로 수렴한다. 그 극한이 오일러 상수 $\gamma \approx 0.5772$이며, γ가 유리수(rational)인지는 아직 아무도 모른다. 여기서 한 것처럼 합을 적분과 비교하는 방법이 **적분 판정법**(integral test)으로, 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서 급수를 다루는 첫 도구 가운데 하나이다. 이를 엄밀하게 다루는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.