풀이

STEP I 1999, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP I 1999, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q7

핵심 아이디어

함수 $\sin(k\sin^{-1}x)$를 두 번 미분하는 것은 번거로워 보이지만, $x=\sin\theta$로 놓아 $y=\sin k\theta$가 되게 하면 다루기 쉬워진다. 다시 미분하기 전에 1계 도함수(derivative)에 $\sqrt{1-x^2}$을 곱해 두면 계산이 짧아진다. 마지막 부분의 요점은, 한 점에서 함숫값과 기울기가 주어진 2계 미분방정식(second-order differential equation)의 해는 하나뿐이라는 것이다. 따라서 우리가 찾은 다항식은 **반드시** $\sin(3\sin^{-1}x)$이어야 한다.

풀이

미분방정식

$-1<x<1$에서 $y=\sin(k\sin^{-1}x)$라 하자. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$을 이용하여 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \text{이므로}\qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

이 두 번째 식을 x에 대하여 미분하면(좌변에는 곱의 미분법(product rule), 우변에는 연쇄법칙을 쓴다)

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$-1<x<1$에서 0이 아닌 $\sqrt{1-x^2}$을 양변에 곱하면

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(*)$이다.

$k = 3$일 때의 삼차식 해

$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$로 놓자. $x = 0$에서 $y = 0$이라는 조건에서 $D = 0$이고, $x = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$이라는 조건에서 $C = 3$이다. 이제

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

이고, 이를 $k^2 = 9$인 $(*)$에 대입하면

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립해야 하므로 계수를 비교한다(계수비교법(comparing coefficients)).

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad -6A - 3A + 9A = 0 \quad (A\text{에 관계없이 항상 성립}),\\
x^2 &: \quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0,\\
x^1 &: \quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0,\\
x^0 &: \quad 2B + 9D = 0.
\end{aligned}$$

따라서 $B = 0$이고($D = 0$과도 모순이 없다), $6A = -8C = -24$에서 $A = -4$이다. 구하는 해는

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$를 나타내기

생각해 보기 같은 방정식의 해가 두 개 있다. 바로 $\sin(3\sin^{-1} x)$와 $3x - 4x^3$이다. 이 둘은 왜 같은 함수여야 할까?

두 함수 모두 $k = 3$인 $(*)$를 만족하고, $x = 0$에서 같은 조건을 만족한다. 다항식은 애초에 그 조건을 만족하도록 만들었다. $y = \sin(3\sin^{-1} x)$에 대해서는 $y(0) = \sin 0 = 0$이고, 위에서 구한 1계 도함수로부터 $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$이다.

$-1 < x < 1$에서는 $1 - x^2 \neq 0$이므로 $(*)$를 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$이 되는데, 이는 계수가 연속인 2계 선형 미분방정식(linear differential equation)이고, 이러한 방정식은 $x = 0$에서 y와 y'의 값이 주어지면 해가 정확히 하나 존재한다. ($x = 0$에서 한 걸음씩 나아간다고 생각해 보자. 방정식은 y와 y'으로부터 y''을 알려 주므로, 처음 값들이 모든 것을 결정한다.) 따라서

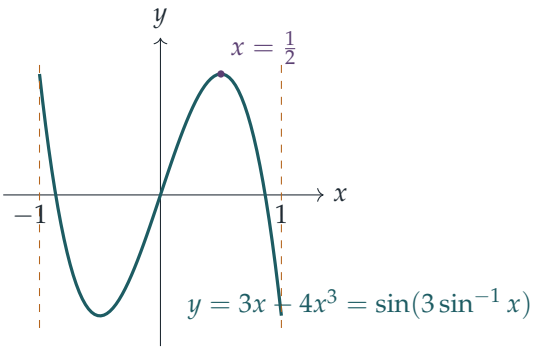
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{단, } -1 < x < 1,$$

이고, 연속성(continuity)에 의해 $x = \pm 1$에서도 성립한다.

이제 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $x = \sin\theta$로 놓으면 $\sin^{-1} x = \theta$이므로

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

이 항등식(identity)은 $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$일 때뿐만 아니라 모든 θ에 대하여 성립한다. 양변 모두 주기(period)가 2π이다. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$이면 $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$로 놓는다. 그러면 $\sin\varphi = \sin\theta$이고 $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$이므로, φ에 대한 항등식으로부터 θ에 대한 항등식이 얻어진다.



이 그래프는 익숙한 곡선 $\sin 3\theta$를 $x = \sin\theta$를 통해 본 것이다. θ가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 3θ는 한 번 반 진동하며, 그래서 $x = \pm\frac{1}{2}$($3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$인 곳)에서 두 개의 극점(turning point)이 생긴다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$이고 $3 - 4 = -1$이다. $\theta = \frac{\pi}{6}$: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$이고 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$이다.
- 수치로 확인하면, $\theta = 0.7$에서 $\sin 2.1 = 0.86321$이고 $3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$이다.
- 같은 항등식을 $\sin(2\theta + \theta)$와 배각 공식(double-angle formulae)으로도 얻을 수 있으며, 이는 좋은 독립적인 검산이 된다.

흔한 실수

- $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$을 몫의 미분법(quotient rule)으로 바로 미분하는 것: 틀리지는 않지만 계산이 지저분하다. 먼저 제곱근을 없애는 편이 훨씬 깔끔하다.
- 삼차식이 $\sin(3\sin^{-1} x)$와 같은 **이유**를 밝히지 않는 것. 같은 방정식을 만족한다는 것만으로는 충분하지 않다. 두 해가 $y(0)$과 $y'(0)$도 같아야 한다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 체비쇼프(Chebyshev) 방정식이다. $k = n$이 자연수이면 이 방정식은 다항식 해를 가지며, $\cos(n\cos^{-1}x)$는 수치 근사(numerical approximation)에서 핵심적인 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) $T_n(x)$이다. 우리가 사용한 유일성 정리(uniqueness theorem)(피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem))는 대학 1학년 미분방정식 강의에서 증명한다. 이런 방정식을 푸는 멱급수(power series) 방법은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.