풀이

STEP I 1999, 문제 6

순수수학 • 이차식의 극값

> **STEP I 1999, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q6

핵심 아이디어

닫힌구간(closed interval)에서 직선은 양 끝점에서 극값을 가지며, 어느 끝점에서 최댓값이 되고 어느 끝점에서 최솟값이 되는지는 오직 기울기(gradient)의 부호에 달려 있다. $c > 0$인 이차함수(quadratic)의 그래프는 $\cup$ 모양의 포물선(parabola)이다. 최댓값은 여전히 끝점에서 나타나지만, 최솟값은 **꼭짓점**(*vertex*)**이 구간 안에 있으면** 꼭짓점에서, 그렇지 않으면 더 가까운 끝점에서 나타난다. 따라서 이 문제 전체는 꼭짓점 $x = -b/(2c)$가 $[-10, 10]$에 대해 어디에 놓이는지를 묻는 것으로 귀결된다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = bx + a$라 하면 $f(10) = a + 10b$이고 $f(-10) = a - 10b$이다.

- $b > 0$이면 f는 순증가(strictly increasing)하므로, 최솟값은 $f(-10) = a - 10b$($x = -10$에서)이고 최댓값은 $f(10) = a + 10b$($x = 10$에서)이다.
- $b = 0$이면 모든 x에 대해 $f(x) = a$이므로, 최댓값과 최솟값은 모두 a이다.
- $b < 0$이면 f는 순감소(strictly decreasing)하므로, 최댓값은 $f(-10) = a - 10b$($x = -10$에서)이고 최솟값은 $f(10) = a + 10b$($x = 10$에서)이다.

세 경우를 모두 한꺼번에 나타내면 다음과 같다.

$$\text{최댓값} = a + 10|b|, \qquad \text{최솟값} = a - 10|b|.$$

소문항 (ii)

$c \geq 0$일 때 $g(x) = cx^2 + bx + a$라 하자. $c = 0$이면 이는 소문항 (i)이므로, 답은 위와 같이 $a \pm 10|b|$이다. 이제부터는 $c > 0$이라 하고 완전제곱식(completing the square)으로 고친다.

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

그래프는 꼭짓점이 $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$인 $\cup$ 모양의 포물선이며, 이 점에서 g는 **모든** 실수 x에 대한 최솟값을 가진다. 또한 g는 $x < x_0$에서 감소하고 $x > x_0$에서 증가한다. 끝점에서의 값은 다음과 같다.

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

최댓값.

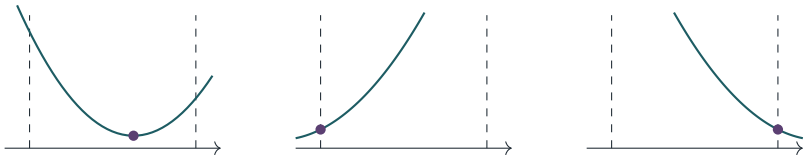
> **생각해 보기** 꼭짓점이 어디에 있든 구간에서 g의 최댓값이 반드시 끝점 중 하나에서 나타나는 이유는 무엇인가?

$c > 0$이므로 $g(x)$는 거리 $|x - x_0|$를 통해서만 x에 의존하며, 그 거리가 커질수록 증가한다. $[-10, 10]$에서 거리 $|x - x_0|$는 끝점 중 하나(x_0에서 더 먼 쪽)에서 가장 크다. 따라서 최댓값은 $g(10)$과 $g(-10)$ 중 큰 값이고, 두 값의 차는 $g(10) - g(-10) = 20b$이다. 그러므로 다음이 성립한다.

- $b > 0$이면 최댓값은 $x = 10$에서 $a + 100c + 10b$이다.
- $b < 0$이면 최댓값은 $x = -10$에서 $a + 100c - 10b$이다.
- $b = 0$이면 최댓값은 양 끝점에서 $a + 100c$이다.

어느 경우든 최댓값 $= a + 100c + 10|b|$이다. 이는 $c = 0$일 때도 성립한다.

최솟값. 이제는 x_0이 어디에 있는지가 중요하다. 꼭짓점이 구간 안에 있을 필요충분조건은 $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$, 즉 ($2c > 0$을 곱하면) $-20c \leq b \leq 20c$, 곧 $|b| \leq 20c$이다.



점선은 $x = \pm 10$이고, 점은 구간에서의 최솟값을 나타낸다.

- $|b| \le 20c$ **(꼭짓점이 구간 안에 있는 경우).** 최솟값은 전역 최솟값(global minimum)이다.
$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{위치: } x = -\frac{b}{2c}.$$
- $b > 20c$ **(꼭짓점이 왼쪽에 있는 경우,** $x_0 < -10$**).** $[-10, 10]$에서 $x > x_0$이므로 g는 그곳에서 증가하고, 최솟값은 $x = -10$에서 $g(-10) = a + 100c - 10b$이다.
- $b < -20c$ **(꼭짓점이 오른쪽에 있는 경우,** $x_0 > 10$**).** 이번에는 g가 구간 전체에서 감소하므로, 최솟값은 $x = 10$에서 $g(10) = a + 100c + 10b$이다.

구간 밖의 두 경우를 합치면 $|b| > 20c$일 때 최솟값 $= a + 100c - 10|b|$이다.

> **생각해 보기** 경계 $|b| = 20c$에서는 어떻게 되는가? 그곳에서 두 공식이 서로 어긋나는가?

그렇지 않다. $b = 20c$이면 꼭짓점이 정확히 $x = -10$에 있으므로 $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$이고 $a + 100c - 10b = a - 100c$도 성립한다. $b = -20c$인 경우도 마찬가지이다. 따라서 b가 $\pm 20c$를 지날 때 답은 연속적으로 변하며, 어느 경우에 경계를 포함시키든 상관없다.

정리. $-10 \le x \le 10$이고 $c \ge 0$일 때

$$\text{최댓값} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{최솟값} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ 이고} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0, b \ne 0$인 경우는 $|b| > 20c = 0$에 해당하며 소문항 (i)의 결과를 다시 준다.

검산

- $g(x) = x^2 + 4x + 1$을 생각하자. 여기서 $|b| = 4 \le 20$이므로 최솟값은 $x = -2$에서 $1 - 4 = -3$이고, 최댓값은 $x = 10$에서 $1 + 100 + 40 = 141$이다. 직접 대입한 결과와 일치한다.
- $g(x) = x^2 + 30x$를 생각하자. 여기서 $b = 30 > 20$이므로 꼭짓점 $x = -15$는 구간 밖에 있고, 최솟값은 $g(-10) = 100 - 300 = -200$이다. 실제로 $g(-10) = -200$이고 g는 $[-10, 10]$에서 증가한다.
- 간단한 컴퓨터 검산으로, $c = 0$과 경계 $|b| = 20c$를 포함한 무작위 (a, b, c) 1000개에 대해 $[-10, 10]$의 401개 점에서 전수 탐색(정확한 유리수 연산)한 결과와 공식을 비교하였다. 모든 경우가 일치한다.

흔한 실수

- 꼭짓점이 $[-10, 10]$ 안에 있는지 확인하지 않고 $a - \frac{b^2}{4c}$를 최솟값으로 제시하는 것.
- $c = 0$인 경우(꼭짓점이 없고, c로 나눌 수도 없다)와 $b = c = 0$인 경우를 빠뜨리는 것.
- 꼭짓점이 구간 밖에 있을 때 어느 끝점에서 최솟값이 나오는지 헷갈리는 것. 꼭짓점에 더 가까운 끝점이다.

STEP 너머

이 문제의 바탕에 있는 사실은 최대최소 정리(Extreme Value Theorem)이다. 유계인 닫힌구간에서 연속(continuous)인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 이 값들은 끝점이나 구간 내부의 정류점(stationary point)에서 나타난다. $c \geq 0$인 $cx^2 + bx + a$와 같은 볼록함수(convex function)가 끝점에서 최댓값을 가진다는 관찰은 볼록 최적화(convex optimisation)의 첫걸음이며, 볼록 최적화는 현대 응용수학의 상당 부분을 떠받치고 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 최대최소 정리를 꼼꼼하게 증명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.