풀이

STEP I 1999, 문제 5

순수수학 • 작은 각 근사

STEP I 1999, 5번 문제

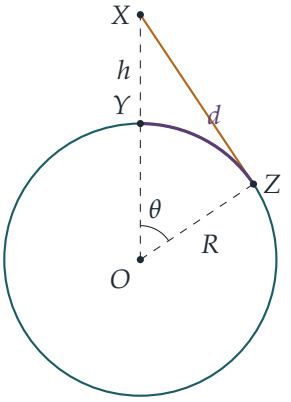
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q5

핵심 아이디어

"지평선에 겨우 보인다"는 것은 Z에서 X로 향하는 시선이 지구를 스치듯 지나간다는 뜻이다. 따라서 이 시선은 Z에서의 접선(tangent)이고, 반지름(radius) OZ에 수직이다. 이로부터 중심 O를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형을 얻고, 호(arc) YZ의 길이는 O에서의 각에 R를 곱한 것이다. 두 근사(approximation)는 이 각이 작을 때와 직각에 가까울 때를 각각 살펴보면 얻어진다.

풀이



소문항 (i)

지구의 중심을 O라 하고 $\theta = \angle YOZ$라 하자. X는 Y의 바로 위에 있으므로 세 점 O, Y, X는 한 직선 위에 있고 $OX = R + h$이다. X가 Z에서 겨우 보이므로 직선 ZX는 Z에서 지구에

접하고, 따라서 반지름 OZ에 수직이다. 직각삼각형 OZX에서

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

반지름이 R인 원에서 중심각 θ에 대한 호 YZ의 길이는 $R\theta$이므로

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

여기서 $0 < R/(R+h) < 1$이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (ii)

h가 R에 비해 작으면 $\cos\theta = R/(R+h)$는 1에 가까우므로 θ는 작고, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$을 쓸 수 있다. 또한 $R+h \approx R$이므로

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

이다. 두 식을 같게 놓으면

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

이다. 여기서 $\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택했다. 따라서

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

이고, 이는 $k = \sqrt{2}$일 때 요구된 꼴이다.

소문항 (iii)

이번에는 $R/(R+h)$가 작으므로 $\cos\theta$는 0에 가깝고, θ는 작은 것이 아니라 $\frac{\pi}{2}$에 가깝다. 주어진 근사는 작은 각에서만 성립하므로, 실제로 작은 각을 재기로 한다.

생각해 보기 여기서 작은 각은 어느 것이고, 그 각에는 어떤 근사를 쓸 수 있는가?

$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$로 놓자. 여기서 $\phi = \angle OXZ$는 위성에서의 각으로, 위성이 멀리 있을 때 작다. 그러면 $\cos\theta = \sin\phi$이므로

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

답에 R^2/h 항이 있으므로 이 식을 R/h에 대한 2차까지 구해야 한다. $R/h < 1$이므로 이항 전개(binomial expansion)를 쓸 수 있고,

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

$\sin\phi \approx \phi$를 쓰면

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

따라서

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

마지막 항은 R^2/h보다 R/h배만큼 더 작으므로 이를 버리면

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

를 얻고, 이는 $a = \frac{\pi}{2}, b = -1$일 때 요구된 꼴이다.

이 차수에서는 $\sin\phi \approx \phi$를 써도 문제가 없다. 이 근사의 오차는 약 $\frac{1}{6}\phi^3$으로 R^3/h^3 정도의 크기이므로, d는 R^4/h^3 차수에서만 달라진다.

검산

- 극한이 타당하다. $h \to 0$이면 $d \to 0$이다. $h \to \infty$이면 $d \to \frac{\pi}{2}R$로, 지구 둘레의 4분의 1이다. 아주 멀리 있는 위성은 거의 반구 전체를 본다. $-R^2/h$ 항은 음수이므로 d는 아래쪽에서 $\frac{\pi}{2}R$에 다가가는데, $\theta < \frac{\pi}{2}$이므로 당연히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면, $R = 1, h = 10^{-4}$일 때 정확한 d를 $\sqrt{2Rh}$로 나눈 값은 0.99996이다. $h = 1, R = 0.01$일 때 정확한 d와 $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$의 차는 9.9×10^{-7}으로, 예측한 대로 대략 R^3/h^2이다.
- 반지름이 6370 km인 지구 위 300 km에 있는 위성의 경우, 정확한 d는 약 1918 km이고 $\sqrt{2Rh}$는 1955 km를 준다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 θ가 작지 않고 $\frac{\pi}{2}$에 가까운데도 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$을 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 $R/(R+h)$를 1차까지만 전개하여 R^2/h 항을 잃고 잘못된 b를 얻는 것.

STEP 너머

두 소문항 모두 점근 전개(asymptotic expansion)이다. 정확한 d를 작은 매개변수 h/R 또는 R/h의 거듭제곱으로 전개하고, 오차를 제한하면서 정해진 차수까지의 항만 남긴다. 빅

오 표기법(big-O notation)과 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem)로 "$\approx$"를 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 종류의 근사를 다루는 STEP 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.