풀이

STEP I 1999, 문제 4

순수수학 • 절댓값이 포함된 영역

> **STEP I 1999, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

핵심 아이디어

절댓값 기호(modulus signs)는 평면을 각 괄호 안의 부호가 일정한 영역들로 나누고, 각 영역에서 주어진 조건은 평범한 일차부등식(마지막 문항에서는 쌍곡선(hyperbola) 꼴의 부등식)이 된다. 시간을 크게 아껴 주는 또 다른 도구는 대칭(symmetry)과 평행이동(translation)이다. $|x|$와 $|y|$가 들어 있으면 집합은 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이므로, 한 사분면(quadrant)에서만 작업한 뒤 대칭이동하면 된다. 또 x를 $x-1$로 바꾸면 그림이 오른쪽으로 한 칸 미끄러질 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

x를 $-x$로, 또는 y를 $-y$로 바꾸어도 집합은 변하지 않으므로, 이 집합은 두 좌표축에 대하여 모두 대칭이다. 제1사분면($x \geq 0, y \geq 0$)에서 조건은 단순히 $x+y \leq 1$이며, 이는 꼭짓점이 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$인 삼각형이다. 이를 두 축에 대하여 대칭이동하면 네 개의 삼각형이 모여 한 꼭짓점으로 선 정사각형을 이루며, 그 꼭짓점은 다음과 같다.

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

같은 말로, 이 집합은 네 반평면(half-plane) $\pm x \pm y \leq 1$의 교집합이다. 부등식이 $\leq$이므로 경계도 포함되며, 넓이는 2이다.

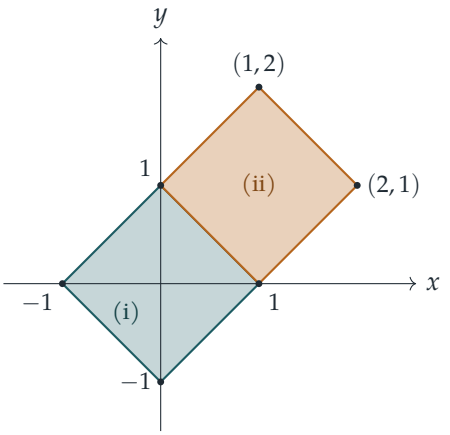
소문항 (ii)

$X = x-1, Y = y-1$로 놓자. 그러면 조건은 $|X|+|Y| \leq 1$이 되고, 이는 (X,Y) 좌표에서 본 소문항 (i)이다. 따라서 이 집합은 소문항 (i)의 정사각형을 $(1,1)$만큼 평행이동한 것으

로, 중심은 $(1,1)$이고 꼭짓점은

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

이며, 직선 $x+y=1$, $x+y=3$, $y=x+1$, $y=x-1$로 둘러싸여 있다. 이 정사각형은 $(1,0)$과 $(0,1)$에서 두 축에 모두 닿는다.



소문항 (iii)

이번에도 평행이동하자. $X=x-1$, $Y=y+1$로 놓으면 조건은 다음이 된다.

$$|X| \le 1+|Y|.$$

이 조건은 X축과 Y축에 대하여, 즉 직선 $x=1$과 $y=-1$에 대하여 모두 대칭이다. 사분면 $X\ge 0$, $Y\ge 0$에서 조건은 $X\le 1+Y$이며, 이는 $(1,0)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $X=1+Y$의 왼쪽 전체이다. 대칭이동하면, 이 집합은 두 개의 열린 쐐기(wedge)를 **제외한** 모든 점으로 이루어진다.

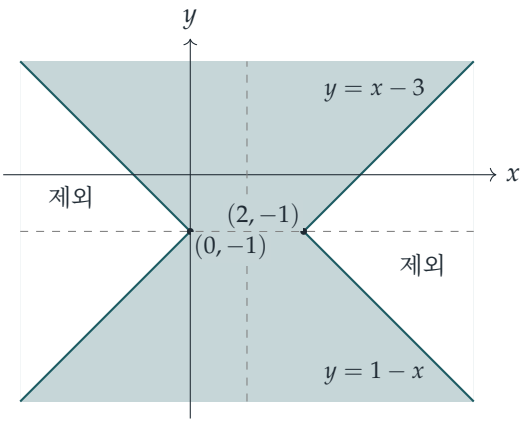
- 오른쪽의 $X>1+|Y|$: 꼭짓점이 $(X,Y)=(1,0)$이고 오른쪽으로 열려 있으며 $Y=\pm(X-1)$로 둘러싸인 직각 쐐기이다.
- 왼쪽의 $X<-1-|Y|$: 그 거울상으로, 꼭짓점이 $(-1,0)$이고 왼쪽으로 열려 있다.

? **생각해 보기** 이 집합은 (i), (ii)에서처럼 유계(bounded)인가?

그렇지 않다. 빼기 부호 하나가 모든 것을 바꾼다. $|Y|$를 크게 할수록 조건은 **더 쉽게** 만족되므로, 고정된 각 Y에 대하여 허용되는 X는 구간 $-1-|Y|\le X\le 1+|Y|$를 이루고, 이 구간은 $|Y|$가 커질수록 넓어진다. 특히 세로 직선 $X=0$(즉 $x=1$) 전체가 이 집합에 속한다.

다시 x,y 좌표로 돌아가면 두 꼭짓점은 $(2,-1)$과 $(0,-1)$이다. 제외되는 오른쪽 쐐기는 $x>2+|y+1|$로, $x\ge 2$에서 반직선 $y=x-3$과 $y=1-x$로 둘러싸여 있다. 제외되는 왼

쪽 쐐기는 $x < -|y+1|$로, $x \le 0$에서 $y = x - 1$과 $y = -1 - x$로 둘러싸여 있다. 경계 직선 자체는 집합에 속한다. 직선 $y = -1$ 위에서 집합은 선분 $0 \le x \le 2$뿐이며, 이곳이 집합의 가장 좁은 부분이다.



점선 $x = 1$과 $y = -1$은 대칭축이다.

소문항 (iv)

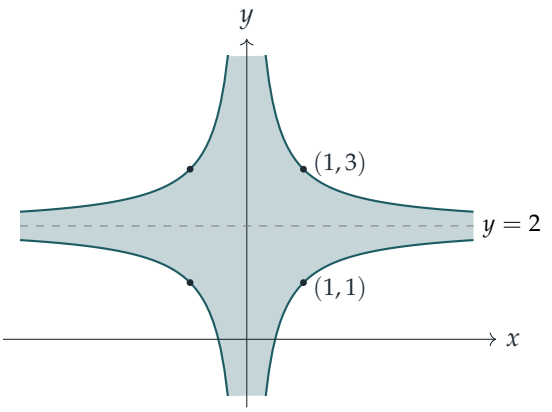
$Y = y - 2$로 놓으면 조건은 $|x|\,|Y| \le 1$이 되고, 이는 x축과 직선 $Y = 0$(즉 $y = 2$)에 대하여 모두 대칭이다. 사분면 $x \ge 0, Y \ge 0$에서 다음과 같다.

- $x = 0$이면 모든 Y에 대하여 조건이 성립하므로, y축 전체가 집합에 속한다.
- $x > 0$이면 x로 나눌 수 있고, 조건은 $0 \le Y \le 1/x$, 즉 쌍곡선 $Y = 1/x$ 아래의 영역이 된다.

두 대칭축에 대하여 대칭이동하면 집합은

$$x = 0, \quad \text{또는} \quad 2 - \frac{1}{|x|} \le y \le 2 + \frac{1}{|x|} \ \ (x \ne 0),$$

이며, 이는 쌍곡선 $(y-2)x = \pm 1$의 네 가지 사이에 갇힌 영역이다. 이 집합은 y축 전체와 직선 $y = 2$ 전체를 포함하며, 이 두 직선은 경계 곡선의 점근선(asymptote)이다. 모양은 $(0,2)$를 중심으로 하는 뚱뚱한 더하기 기호처럼 생겼다. "정사각형" $|x| \le 1, |y-2| \le 1$의 꼭짓점은 경계 위의 $(\pm 1, 1)$과 $(\pm 1, 3)$에 있고, 가로 팔은 $|x| \to \infty$일 때 $y = 2$ 쪽으로 좁아지며, 세로 팔은 $|y| \to \infty$일 때 y축 쪽으로 좁아진다. 이 집합은 유계가 아니다(그리고 흥미롭게도 넓이가 무한하다).



검산

- 몇 개의 점을 원래 부등식에 대입해 보자. (iii)에서 $(1, 100)$을 대입하면 $0 - 101 \leq 1$이므로 이 점은 집합에 속하고(집합이 유계가 아님을 확인해 준다), $(2.01, -1)$을 대입하면 $1.01 > 1$이므로 오른쪽 꼭짓점 바로 바깥에 있다. (iv)에서 $(2, 2.5)$를 대입하면 $2 \times 0.5 = 1$로 경계 위에 있고, $(2, 2.51)$은 바로 바깥에 있다.
- (i)에서 네 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}$이므로 정사각형의 넓이는 2이다. 격자 세기로 구하면 2.002가 나온다.
- 각 소문항마다 $[-6, 6]^2$에서 무작위로 고른 400,000개의 점에 대하여 원래 부등식과 우리의 기술(반평면, 제외된 쐐기, 또는 $|y - 2| \leq 1/|x|$)을 비교했으며, 어긋나는 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- (ii)와 (iii)에서 반대 방향으로 평행이동하는 실수: $|x - 1|$은 그림을 $x = +1$로 옮기고, $|y + 1|$은 그림을 $y = -1$로 옮긴다.
- (iii)에서 (i)과의 유추로 유계인 마름모를 그리는 실수. 빼기 부호가 $|y + 1|$의 역할을 뒤집으므로 집합은 유계가 아니다.
- (iv)에서 $x = 0$인 경우를 따로 다루지 않고 $|x|$로 나누어, y축 전체가 집합에 속한다는 사실을 놓치는 실수.

STEP 너머

(i)의 집합은 "택시" 노름(norm) $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$에 대한 단위 공(unit ball)이고, (ii)는 $(1,1)$을 중심으로 하는 반지름 1인 공이다. 노름이 다르면 단위 공의 모양도 달라지며(보통의 거리에서는 원, $\max(|x|,|y|)$에서는 변이 수평인 정사각형), 해석학(analysis)이나 거리 공간(metric space)의 첫 강의에서는 $\mathbb{R}^2$ 위에서 이 노름들이 모두 같은 수렴(convergence)과 연속성(continuity)의 개념을 정의한다는 것을 보인다. 바틀(Bartle)과 셔버트(Sherbert)의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 개념을 처음 만나기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.