풀이

STEP I 1999, 문제 3

순수수학 • 순환 연립방정식

> **STEP I 1999, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q3

핵심 아이디어

각 방정식은 $f(x) = 1 + 1/x$에 대하여 $x_k = f(x_{k+1})$이라는 뜻이고, 이 연립방정식은 닫혀서 하나의 고리(loop)를 이룬다. 이웃한 항 사이의 차는 간단한 규칙을 따른다. 각 차는 다음 차를 1보다 큰 두 수의 곱으로 나눈 것이다. 따라서 고리를 한 바퀴 도는 동안 차는 작아질 수밖에 없다. 그런데 결국 출발점으로 되돌아오므로, 차는 모두 0이어야 한다.

이 풀이 전체에서 첨자는 순환적으로(cyclically) 읽는다. 즉 x_{n+1}은 x_1을, x_{n+2}는 x_2를 뜻한다. 그러면 연립방정식의 모든 방정식은 하나의 꼴

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

로 쓸 수 있다.

풀이

소문항 (i)

모든 x_k가 양수이므로 모든 k에 대하여 $1/x_{k+1} > 0$이다. 따라서

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{단, } k = 1, 2, \ldots, n,$$

이고, 첨자를 순환적으로 읽으므로 이것은 $x_1, \ldots, x_n$ 모두에 해당한다(마지막 것은 $x_n = 1 + 1/x_1$이다). 그러므로 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$이다.

소문항 (ii)

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 빼면

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 여기서는 $x_1 = 1 + 1/x_2$와 $x_2 = 1 + 1/x_3$만 사용했다(그리고 x_3이 다른 변수가 되도록 $n \geq 3$이라는 사실도 사용했다). 연속한 임의의 두 방정식에 대하여 똑같이 계산하면, 모든 k에 대하여

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(첨자는 순환적)}.$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

이웃한 항 사이의 차를 $d_k = x_k - x_{k+1}$로 쓰자. 그러면 $d_n = x_n - x_1$이다. (ii)의 일반형은 $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$가 된다. 절댓값(absolute value)을 취하고, $x_{k+1}x_{k+2} > 1$임을 알려 주는 소문항 (i)을 이용하면

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

이고, $d_{k+1} \neq 0$일 때마다 **등호가 없는**(*strict*) 부등식이 성립한다. 이 부등식들을 고리를 따라 이어 붙이면

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

이다. 양 끝이 같으므로 이 사슬의 모든 부등식은 등식이다. 특히 $|d_1| = |d_2|$이다. 그런데 $d_2 \neq 0$이라면 등호 없이 $|d_1| < |d_2|$가 되어야 하므로 $d_2 = 0$이고, 그러면 $|d_2|$와 같은 모든 $|d_k|$도 0이다.

> ? **생각해 보기** 연립방정식이 $x_n = 1 + 1/x_1$로 닫혀 있다는 사실을 정확히 어디에서 사용했는가?

사슬의 마지막 고리인 $|d_n| \leq |d_1|$에서만 사용했으며, 이것은 $x_n = 1 + 1/x_1$에서 나온다. 이것이 없다면 차는 k가 커짐에 따라 그냥 커질 수도 있고, 실제로 열린 사슬 $x_1, \ldots, x_n$은 상수일 필요가 없다. 출발점으로 되돌아온다는 사실이 바로 "작아짐"을 "전혀 작아지지 않음"으로 만든다.

따라서 모든 k에 대하여 $x_k = x_{k+1}$, 즉 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$이다.

x_1의 값

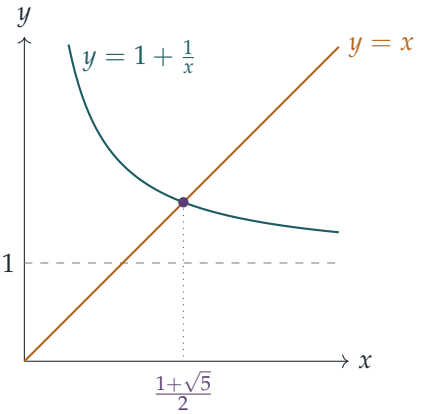
이 공통값을 x라 하자. 이제 어느 방정식이든 $x = 1 + 1/x$를 뜻하므로

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

이다. 소문항 (i)에 의해 $x > 1$이므로 음의 근은 제외되고, 따라서

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

이다. 역으로 모든 x_k를 이 값으로 놓으면 n개의 방정식을 모두 만족하므로, 연립방정식은 실제로 이 해를 가지며 (iii)에 의해 다른 해는 없다. 기하학적으로 x는 곡선 $y = 1 + 1/x$와 직선 $y = x$가 만나는 점이다.



검산

- $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$이면 $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$이 되어 조건을 만족한다.
- (ii)의 항등식은 임의의 열린 사슬에서 확인해 볼 수 있다. $x_3 = 2$로 잡으면 $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{5}{3}$이다. 그러면 $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$이고 $-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$이다.
- 고리를 한 바퀴 다 돌면 $f(x) = 1 + 1/x$에 대하여 $x_1 = f^n(x_1)$이다. $n = 3, \ldots, 11$에 대하여 $(0, 20)$에서 $f^n(x) - x$를 수치적으로 조사하면 부호가 바뀌는 곳은 $x \approx 1.618$ 한 곳뿐이므로, 다른 해가 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $|d_1| \le |d_2|$만으로 (iii)을 증명하려는 것. 한 단계만으로는 차가 커지지 않는다는 것밖에 알 수 없다. 고리를 한 바퀴 다 돌아 $|d_1|$로 되돌아와야 한다.

- x_k들이 같다고 가정한 뒤 x_1을 구하는 것. 그 가정을 정당화하는 것이 바로 소문항 (iii)이며, 여기에는 소문항 (i)에서 얻은 등호 없는 부등식 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$이 필요하다.
- 음수인 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$를 제외하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 $|f(a) - f(b)| = |a-b|/(ab)$이므로 $f(x) = 1 + 1/x$가 $x > 1$에서 점들을 서로 더 가깝게 만든다는 것이다. 이런 사상을 **축소사상**(*contraction*)이라 하며, 바나흐(Banach) 고정점 정리(fixed-point theorem)에 따르면 완비 공간(complete space)에서의 축소사상은 단 하나의 고정점을 가지고, 어떤 점에서 출발하든 반복(iteration)하면 그 고정점으로 수렴한다. 여기서 $x = 1$에서 출발하여 반복하면 연속한 피보나치(Fibonacci) 수의 비 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$를 얻고, 황금비(golden ratio)의 연분수(continued fraction) 전개 $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$를 얻는다. 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라. 연분수에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(정수론 입문서)을 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.