풀이

STEP I 1999, 문제 2

순수수학 • 자취와 무게중심

> **STEP I 1999, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

핵심 아이디어

조건을 식으로 쓰고 전개하면 x^2과 y^2의 계수가 모두 3이고 xy항이 없는 식을 얻는다. 이것이 바로 원의 특징이다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 중심이 어디인지 드러나며, 일차항에 나타나는 것이 정확히 $x_1+x_2+x_3$이므로 무게중심(centroid)이 자연스럽게 등장한다. 그러면 a^2에 대한 제약은 "반지름의 제곱"이 언제 음수가 될 수 있는지를 따져 보는 것에서 곧바로 나온다.

풀이

자취

$P=(x,y)$를 자취(locus) 위의 점이라 하고, $i=1,2,3$에 대하여 $A_i=(x_i,y_i)$라 하자. 조건은

$$\sum_{i=1}^{3}\Big[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\Big]=a^2.$$

이다. 이를 전개하고 $x_1+x_2+x_3=3\bar{x}$와 $y_1+y_2+y_3=3\bar{y}$를 이용하면

$$3x^2-6\bar{x}\,x+3y^2-6\bar{y}\,y+\sum_i(x_i^2+y_i^2)=a^2.$$

이다. 이것이 자취의 방정식이다. 이것이 어떤 도형인지 보기 위해 3으로 나누고 완전제곱식으로 고치면

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\frac{a^2-\sum_i(x_i^2+y_i^2)+3\bar{x}^2+3\bar{y}^2}{3}.$$

이다. 분자는 깔끔하게 정리된다. $\sum_i x_i = 3\bar{x}$이므로

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x}\cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

이고, y에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 세 점에서 그 무게중심 $G = (\bar{x}, \bar{y})$까지의 거리의 제곱의 합을

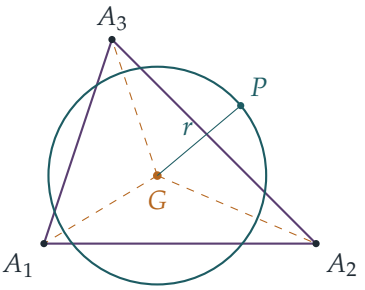
$$S = \sum_{i=1}^{3} \left[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right]$$

이라 하면, 자취는

$$\boxed{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - S}{3}}.$$

이다.

해석. $a^2 > S$일 때 이것은 세 점의 무게중심 G를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{(a^2 - S)/3}$인 원이다. a^2이 변하면 G를 중심으로 하는 동심원(concentric circles)의 族을 얻는다. 경계인 경우 $a^2 = S$에서는 이 "원"이 한 점 G로 줄어든다.



a^2이 S보다 작을 수 없는 이유

생각해 보기 상자 안 방정식의 우변이 음수라는 것은 무엇을 뜻하는가?

좌변 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$은 실수의 제곱의 합이므로 결코 음수가 아니다. $a^2 < S$이면 우변이 음수이므로 방정식을 만족하는 실수 점 (x, y)는 없다. 즉 자취는 공집합이다. 따라서 점이 주어진 대로 움직일 수 있으려면 $a^2 \geq S$이어야 한다.

같은 계산을 거꾸로 읽어 보면 많은 것을 알 수 있다. 우리가 실제로 증명한 것은 모든 점 P에 대하여 성립하는 항등식

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 3\,PG^2 + S.$$

이다. $PG^2 \geq 0$이므로 합 $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2$은 항상 S 이상이고, 등호는 $P = G$일 때만 성립한다. 말로 하면, 무게중심은 세 점까지의 거리의 제곱의 합을 최소로 하는 점이며 그 최솟값은 S이다. 이 최솟값보다 작은 일정한 합 a^2은 불가능하다.

검산

- $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (4,0)$, $A_3 = (1,3)$으로 잡으면 $G = (\frac{5}{3}, 1)$이고 $S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$이다. $P = G$에서 거리의 제곱의 합은 정확히 $\frac{44}{3} \approx 14.67$이다. $P = (0,0)$에서는 $0 + 16 + 10 = 26$이고, $3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$이므로 항등식이 예측한 대로이다.
- 또 하나의 유용한 형태: $S = \frac{1}{3}(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2)$. 위의 예에서 변의 길이의 제곱은 16, 18, 10이므로 다시 $\frac{44}{3}$을 얻는다.
- 무작위로 뽑은 점 세 개의 조 2000개에 대해 분수로 항등식을 정확히 확인했고, 원 위의 점들에서 합이 a^2이 되는 것과 합의 최솟값이 S이며 G에서 얻어진다는 것을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 반지름을 $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$로 두고 S를 써서 나타낼 수 있음을 알아차리지 못하는 것. 그러면 마지막 부분을 알아보기가 매우 어려워진다.
- 자취가 원이 아니라 한 점이 되는 퇴화된 경우(degenerate case) $a^2 = S$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

항등식 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$은 관성 모멘트에 대한 평행축 정리(parallel axis theorem)의 한 형태이며, 통계학에서는 제곱합을 "집단 간"과 "집단 내" 부분으로 분해하는 것이다. 평균은 편차의 제곱의 합을 최소로 하는 값이며, 바로 이것이 최소제곱법(least squares) 적합이 통하는 근본적인 이유이다. 선형대수학에서 이것은 모습을 바꾼 피타고라스(Pythagoras) 정리이다. G에서 P로 가는 벡터가 합이 0인 편차 $A_i - G$들과 (적절한 의미에서) 직교(orthogonal)하기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 최소제곱법을 이러한 사영(projection)의 관점에서 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.