풀이

STEP I 1999, 문제 12

확률과 통계 • 치우친 주사위의 부등식

> **STEP I 1999, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.13 절 **조작된 주사위**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/loaded-dice.html

핵심 아이디어

첫 줄의 부등식(inequality)이 이 문제를 움직이는 엔진의 전부이다. 모든 합이 같은 확률(probability)로 나온다면, 두 "모서리" 합 2와 12는 각각 확률의 곱이 $\frac{1}{11}$이 되도록 강제하고, 그러면 합 7에는 두 교차항이 들어 있게 되는데 그 합은 $c\,(x + x^{-1})$ 꼴이 된다. 부등식에 의해 이 합은 너무 커진다. 소문항 (ii)도 모양만 다를 뿐 같은 아이디어이다. 제곱의 합은 모든 값이 같을 때 가장 작다.

풀이

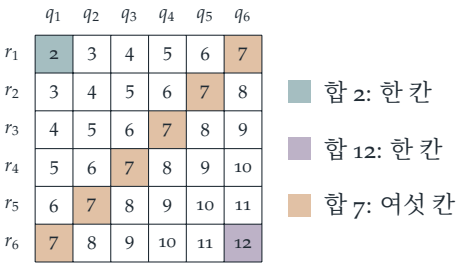
소문항 (i)

부등식. $x > 0$이면 제곱근을 취할 수 있고,

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

이므로 $x + x^{-1} \geq 2$이며, 등호는 $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$, 즉 $x = 1$일 때만 성립한다. (같은 이야기로, $(x-1)^2 \geq 0$에 양수 x^{-1}을 곱해도 된다.)

주사위. $2 \leq s \leq 12$에 대하여 합이 s일 확률을 p_s라 하자. 두 주사위는 독립(independent)이므로, (첫째 주사위가 i, 둘째 주사위가 j)라는 쌍이 나올 확률은 $q_i r_j$이다. 아래 격자는 우리에게 필요한 합이 어떤 쌍에서 나오는지 보여 준다.



합 2는 $(1,1)$에서만, 합 12는 $(6,6)$에서만 나오므로

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

합 7은 $(1,6)$과 $(6,1)$을 포함한 여섯 쌍에서 나온다. 여섯 항은 모두 음이 아니므로

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

이제 귀류법(proof by contradiction)으로, 열한 가지 합이 모두 같은 확률로 나온다고 가정하자. 이 합들은 가능한 모든 경우를 빠짐없이 나타내므로, 각각의 확률은 $\frac{1}{11}$이다. 그러면 $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$이고 $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$이다. 특히 q_1, r_1, q_6, r_6 중 어느 것도 0이 아니므로 $r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$, $r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$로 쓸 수 있다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned} p_7 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{단, } x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

이고, 마지막 부등식은 방금 증명한 부등식에서 나온다. 그런데 $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$이므로 모순이다. 따라서 두 주사위를 어떻게 조작하더라도 합 $2, 3, \ldots, 12$가 모두 같은 확률로 나올 수는 없다.

? **생각해 보기** q_1과 q_6이 0이 아님을 짚어 둔 것이 왜 중요했을까?

우리는 q_1과 q_6으로 나누었고, 부등식 $x + x^{-1} \geq 2$는 $x > 0$이어야 쓸 수 있다. 두 조건 모두 곱 $q_1 r_1$과 $q_6 r_6$이 각각 $\frac{1}{11} \neq 0$이라는 사실로 보장된다. 이 단계가 없으면 논증에 구멍이 생긴다. 일반적으로는 1이 절대 나오지 않는 주사위도 얼마든지 허용되기 때문이다.

소문항 (ii)

첫째 주사위를 두 번 던졌을 때 같은 수가 나오는 사건을 S라 하자. 두 번의 던지기는 독립이므로 둘 다 j가 나올 확률은 q_j^2이고, 이 여섯 사건은 서로 배반이다. 따라서

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

$q_j \geq 0$이고 $\sum q_j = 1$이라는 조건에서 이 값이 가장 작을 때를 구하려고 한다. 주사위가 공정한 주사위에서 얼마나 벗어나 있는지를 재는 제곱의 합을 전개하자.

$$0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 = \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36}$$
$$= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}.$$

따라서 $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$이고, 등호는 모든 $q_j = \frac{1}{6}$일 때, 즉 공정한 주사위일 때 정확히 성립한다.

생각해 보기 1/36은 어디에서 나온 값이며, 왜 함정일까?

$\frac{1}{36}$은 공정한 주사위에서 더블 식스처럼 **특정한** 한 쌍이 나올 확률이다. "두 수가 같다"는 이런 쌍 여섯 개를 포함하므로, 공정한 주사위에서는 그 확률이 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$이고, 주사위를 조작하면 이 값은 커질 수만 있다.

따라서 답은 **아니다**이다. q_j의 값이 무엇이든 두 수가 같을 확률은 적어도 $\frac{1}{6}$이며, 이는 $\frac{1}{36}$보다 훨씬 크다.

검산

- 공정한 주사위: $p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$이지만 $p_7 = \frac{6}{36}$이므로, 결과가 예측하는 대로 확률이 분명히 서로 다르다.
- 조작된 주사위 쌍 20,000개를 무작위로 수치 탐색했을 때, 열한 가지 합이 모두 $\frac{1}{11}$과 0.05 이내로 가까워진 경우는 한 번도 없었고, 분수를 이용한 정확한 계산으로 매번 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$임을 확인했다.
- $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$인 주사위에 대해 $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$이다. 두 번 던지기를 200,000회 모의실험한 결과는 0.194였다.

흔한 실수

- 두 주사위가 같다고($q_i = r_i$) 가정하는 것. 문제에서는 두 주사위를 서로 다르게 조작해도 되며, 위의 논증은 두 주사위가 같을 필요가 없다.
- $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$이라고 쓰는 것. 항이 네 개 더 있다. 부등식만 있으면 되므로 그 항들은 버려도 되지만, 그 이유($q_i r_j \geq 0$)는 밝혀야 한다.
- 소문항 (ii)에서 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$이라고 답하거나, "같다"가 여섯 가지 결과 중 어느 것이든 된다는 뜻임을 잊는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$이라는 명제로, 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)의 특수한 경우이다. $\sum q_j^2$이라는 양은 **충돌 확률**(collision probability)이라 불리며, 정보 이론과 해싱(hashing) 분석에 등장한다. 소문항 (i)은 생성함수(generating function)에 관한 고전적인 결과이다. 두 주사위의 합의 확률생성함수(probability generating function)는 $Q(t)R(t)$인데, 깔끔한 다른 증명은 다음과 같다. 합이 균등하게 나온다면 $1 + t + \cdots + t^{10}$이 5차 실계수 다항식 두 개의 곱의 상수배가 되어야 하고, 각 5차 다항식은 실근을 가진다. 그런데 $1 + t + \cdots + t^{10} = (t^{11} - 1)/(t - 1)$은 실근이 없다. 이런 종류의 생성함수는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.