풀이

STEP I 1999, 문제 11

역학 • 중력에 의한 원운동

STEP I 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.8 절 **삼각형을 이룬 세 별**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/three-stars.html

핵심 아이디어

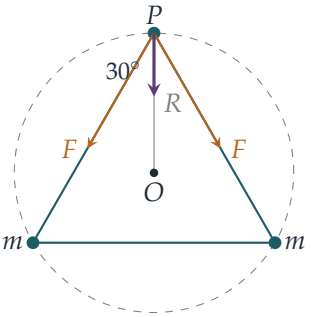
운동을 추측하고 확인해 본다. 삼각형이 중심을 축으로 강체처럼 회전한다면 각 별은 원을 그리며 움직이므로, 중심을 향하는 크기가 정확히 $m\omega^2 R$인 알짜힘(net force)이 필요하다. 대칭성에 의해 나머지 별들이 각 별에 작용하는 중력은 중심을 정확히 향한다. 따라서 그 크기를 $m\omega^2 R$과 같게 놓고 ω를 읽어 내기만 하면 된다. 중심에 별을 하나 놓으면 크기를 알고 있는 안쪽 방향의 인력이 하나 더해진다.

풀이

별들을 서로의 인력만으로 움직이는 입자로 모형화한다. O를 질량중심(centre of mass)이라 하자. 질량이 같은 세 물체의 경우 이 점은 삼각형의 무게중심(centroid)이고, 각 꼭짓점에서의 거리는

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

이다.



세 개의 별

위쪽 꼭짓점에 있는 별 P를 생각하자. 나머지 두 별은 각각 크기가

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

인 힘으로 P를 끌어당기며, 그 방향은 삼각형의 한 변을 따른다. PO는 P에서의 60° 각을 이등분하므로, P를 지나는 각 변은 PO와 30°의 각을 이룬다. PO에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 다음과 같다.

- PO에 수직인 방향으로는 두 성분의 크기가 같고 방향이 반대이므로 상쇄된다.
- PO 방향으로는 합력(resultant)이 O를 향하는 $2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$이다.

대칭성에 의해 나머지 두 별도 같은 상황에 놓여 있다.

이제 삼각형이 O를 축으로 각속도(angular velocity) ω로 강체처럼 회전한다고 하자. 그러면 각 별은 반지름 R인 원 위를 일정한 속력 $R\omega$로 움직이므로, O를 향하는 가속도 $R\omega^2$이 필요하다. O를 향하는 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

을 얻는다.

> ? **생각해 보기** 이것이 왜 어느 한 순간에 힘이 맞아떨어진다는 것만이 아니라 그 운동이 **가능하다**는 것을 보여 주는가?

별들을 꼭짓점에서 출발시키되, 크기가 $R\omega$이고 OP에 수직이며 모두 같은 방향으로 도는 속도를 준다. 이 배치가 O를 중심으로 하는 한 변의 길이 a인 정삼각형으로 유지되는 동안, 각 별에 작용하는 힘은 각속도 ω의 원운동에 필요한 크기와 방향을 정확히 가진다. 따라서 강체처럼 회전하는 삼각형은 모든 순간에 모든 별의 운동 방정식(equation of motion)을 만족한다. 그러므로 이것은 계의 실제 운동이다. 즉 그 초기 조건에서 따라 나오는 해이다. 전체 운동량(momentum)이 0이므로 O는 마땅히 고정된 채로 있다. 따라서 각 별은 질량중심을 축으로 각속도 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$로 공전할 수 있다.

중심에 네 번째 별 추가하기

질량이 λm인 별을 O에 놓자. 질량중심은 여전히 O이다. 바깥쪽 세 별은 서로 120°를 이루는 같은 크기의 힘으로 중심의 별을 끌어당기므로 합력은 0이다. 따라서 바깥쪽 세 별이 대칭적인 배치를 유지하는 한, 중심의 별은 O에 정지한 채로 있다.

이제 바깥쪽의 각 별에는 O를 향하는 크기가

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

인 인력이 추가로 작용한다. 여기서 $R^2 = a^2/3$을 썼다. 이 추가된 힘은 PO 방향으로 작용하므로 안쪽 방향의 합력에 그대로 더해진다. O를 향하는 운동 방정식은

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

이 된다. 앞에서와 같은 논증으로 이 강체 회전이 실제 운동임을 알 수 있다. 따라서 네 번째 별이 중심에 정지해 있을 때, 바깥쪽 세 별은 그 별을 축으로 각속도

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

로 공전할 수 있다.

검산

- $\lambda = 0$으로 놓으면 마땅히 처음의 답이 다시 나온다.
- 차원(dimensions): $\gamma m/r^2$은 가속도이므로 $\gamma m/a^3$의 단위는 시간$^{-2}$이고, 이는 ω^2의 단위로 알맞다.
- λ가 매우 크면 바깥쪽 별들은 서로의 인력을 거의 느끼지 못한다. 그러면 이들은 중심의 질량만을 축으로 $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$로 공전하며, 이는 지배적인 항과 일치한다.
- 전체 운동 방정식을 ($\gamma = m = a = 1$로 두고) 수치적으로 적분해 보았다. 예측한 원운동 속도에서 출발하면, $\lambda = 0, 1, 2.5$인 경우 모두 별들이 세 바퀴를 돈 뒤 상대 오차 10^{-7} 미만으로 출발 위치에 돌아왔다. 예를 들어 $\lambda = 1$이면 $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$이다.

흔한 실수

- 원의 반지름이나 중심 별까지의 거리로 $R = a/\sqrt{3}$ 대신 a를 쓴다.

- 크기가 F인 두 인력이 PO와 30°를 이룬다는 것을 잊고 $2F$로 더한다.
- 중심의 별이 왜 제자리에 있는지, 즉 그 별에 작용하는 세 인력이 상쇄된다는 것을 언급하지 않는다.

STEP 너머

이것은 삼체 문제(three-body problem)에 대한 라그랑주(Lagrange)의 정삼각형 해의 특수한 경우이다. 이 해는 회전하는 정삼각형의 꼭짓점에 놓인 **임의의** 세 질량에 대해 성립한다. 같은 아이디어로 라그랑주 점(Lagrange points) L_4와 L_5를 얻는데, 이곳에서 트로이 소행성군(Trojan asteroids)이 목성과 궤도를 공유한다. 이러한 배치가 **안정**(stable)한지는 더 깊은 문제로, 회전하는 해 주위에서 운동 방정식을 선형화(linearising)하여 답할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 중심력(central forces)과 궤도(orbits)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.