풀이

STEP I 1999, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP I 1999, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q10

핵심 아이디어

입자는 용수철을 두 개의 용수철 AP와 PB로 나눈다. 탄성률(modulus)은 재료의 성질이므로 두 조각은 모두 전체 용수철과 같은 탄성률 λ를 갖지만, 자연 길이(natural length)는 각각 a와 b이다. 하나의 좌표, 즉 위쪽 끝에서 입자까지의 거리를 써서 각 조각에 대한 훅의 법칙(Hooke's law)을 쓰면, 운동 방정식(equation of motion)이 그 좌표에 대해 일차식이 된다. 좌표의 계수가 주기(period)를 결정하므로, 그 계수가 무엇에 의존하고 무엇에 의존하지 않는지만 살펴보면 된다.

풀이

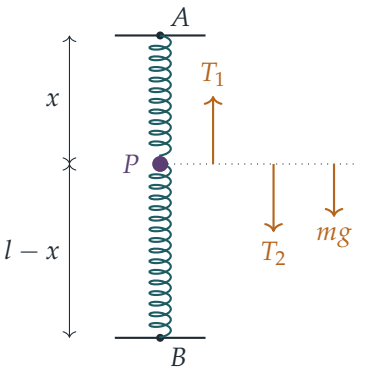
모형

입자의 질량을 m이라 하자. 용수철은 가벼우므로 각 조각 안에서는 장력(tension)이 어디서나 같고, 용수철은 늘어날 때(extension)와 압축될 때(compression) 모두 훅의 법칙을 따른다(줄이 아니라 용수철이므로 당길 뿐 아니라 밀 수도 있다). 먼저 A가 위쪽 끝이라고 하자. 시각 t에서 입자가 A 아래로 떨어진 거리를 x라 하면 $AP = x$, $PB = l - x$이다.

AP의 자연 길이는 a이고 PB의 자연 길이는 b이므로, 훅의 법칙에 의해

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

이다. 여기서 T_1은 AP의 장력이고 T_2는 PB의 장력이다. 장력이 양수이면 입자를 그 조각의 고정된 끝 쪽으로 당기고, 음수이면 그 조각이 압축되어 입자를 반대쪽으로 민다는 뜻이다. 어느 경우든 이 식들은 부호까지 올바른 힘을 주므로, 어느 조각이 늘어나 있는지 미리 알 필요가 전혀 없다.



단순 조화 운동

입자에 작용하는 힘을 아래 방향으로 분해하면, 무게 mg, 위쪽으로 작용하는 장력 T_1, 아래쪽으로 작용하는 장력 T_2가 있다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

상수 $\pm\lambda$는 소거되고, 우변은 기울기가 음수인 x의 일차함수(linear function)이다. 이제

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

이라 두자. 그러면 운동 방정식은

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

이 되므로, $X = x - x_0$(평형 위치(equilibrium position) x_0로부터의 변위)라 하면 $\ddot{X} = -\omega^2 X$이다. 이것은 $x = x_0$를 중심으로 하는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이며, 주기는

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

이다. 이로써 첫 번째 결과가 증명된다.

생각해 보기 한 조각이 압축되는 순간 운동이 더 이상 단순 조화 운동이 아니게 되지 않을까?

탄성 줄이라면 그렇다. 줄의 장력 공식은 줄이 늘어나 있을 때만 성립하기 때문이다. 용수철은 압축될 때에도 같은 훅의 법칙 공식을 따르므로, (코일이 서로 맞닿지 않는 한) 위의 방정식 하나가 운동 내내 성립하며, l이나 진폭(amplitude)을 제한할 필요가 없다.

l과 방향에 대한 무관성

길이 l은 x_0에만 나타난다. l을 바꾸면 진동의 중심은 이동하지만 ω, 따라서 주기는 변하지 않는다.

반대로 B가 위쪽에 있다면, 두 조각의 역할을 바꾸어 같은 계산을 하면 된다. 이제 위쪽 조각의 자연 길이는 b이고 아래쪽 조각의 자연 길이는 a이다. 이는 모든 곳에서 a와 b를 맞바꾸는 것일 뿐이다. 주기는 ab와 $a+b$를 통해서만 a와 b에 의존하고, 이 둘은 모두 대칭이므로 주기는 변하지 않는다. (평형 위치는 달라진다. 이제는 중력이 자연 길이가 a인 조각이 아니라 b인 조각을 늘리기 때문이다.)

따라서 l의 값이 무엇이든, 어느 끝이 위쪽에 있든 주기는 $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$이다.

검산

- 질량의 양쪽에 있는 두 용수철은 **병렬**(*in parallel*)로 작용한다. 강성(stiffness) λ/a와 λ/b를 더하면 위의 ω^2에서처럼 $\lambda(a+b)/(ab)$가 된다.
- 극한의 경우 $b \to \infty$: 아래쪽 조각이 매우 약해져서, 자연 길이가 a인 용수철 하나에 매달린 질량이 되고, 주기는 $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$가 된다.
- 단위: λ는 힘이므로 ma/λ의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이다.
- 수치적으로, $m=1$, $\lambda=50$, $a=1$, $b=2$일 때 공식은 주기 0.72552를 준다. $l=2$, 3, 4.5에 대해(두 조각이 모두 압축되는 경우도 포함하여) 어느 끝을 위로 하든 전체 운동방정식을 수치적으로 단계별 계산하면 유효숫자 다섯 자리까지 같은 주기를 얻으며, 상수를 무작위로 여러 번 골라도 10^{-5} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 각 조각의 탄성률로 $\lambda a/(a+b)$ 같은 값을 쓰는 것. 각 조각의 탄성률은 여전히 λ이며, 변하는 것은 강성 $\lambda/$(자연 길이)이다.
- 아래쪽 장력의 부호를 잘못 잡는 것. 늘어난 PB는 입자를 B 쪽, 즉 **아래로** 당긴다.
- 방향에 관한 부분의 논증을 빠뜨리는 것. 두 끝을 맞바꾸면 a와 b가 맞바뀌고, 주기는 이 둘에 대해 대칭이라는 것을 말해야 한다.

STEP 너머

계를 여러 용수철로 나누고 강성을 더하는 것은 연성 진동자(coupled oscillators)로 가는 첫걸음이다. 용수철을 따라 여러 개의 질량이 있으면 운동 방정식은 선형 연립방

정식을 이루고, 가능한 진동수는 어떤 행렬의 고윳값(eigenvalues)(“정규 모드(normal modes)”)으로 주어진다. 아주 작은 질량이 매우 많은 극한에서는 용수철이나 막대 속의 종파(longitudinal waves)에 대한 파동 방정식(wave equation)을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 정규 모드를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.