풀이

STEP I 1999, 문제 1

순수수학 • 서로소인 정수 세기

> **STEP I 1999, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

핵심 아이디어

2와 5로 나누어떨어지는지(divisibility)는 마지막 자리 숫자에만 달려 있고, 3과 7로 나누어떨어지는지는 21을 법(modulo)으로 한 나머지(remainder)에만 달려 있다. 따라서 구하는 정수들은 묶음마다 일정한 패턴으로 반복되며, 그 개수를 세려면 한 묶음을 세어 곱하기만 하면 된다. 평균에 대해서는 대칭성(symmetry)이 요령이다. n이 집합에 속하면 그 "짝" $N-n$도 집합에 속하므로, 수들이 중점을 중심으로 짝을 이룬다.

풀이

소문항 1: 2 또는 5로 나누어떨어지지 않는, 백만 미만의 수

"2 또는 5로 나누어떨어지지 않는다"는 것은 둘 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는다는 뜻이다. 정수가 2 또는 5로 나누어떨어지는 것은 정확히 그 마지막 자리 숫자가 $0, 2, 4, 5, 6$ 또는 8일 때이다. 따라서 구하는 정수는 마지막 자리 숫자가 $1, 3, 7$ 또는 9인 정수이다.

정수 $0, 1, \ldots, 999\,999$는 연속한 열 개의 정수 $10k, 10k+1, \ldots, 10k+9$로 이루어진 $100\,000$개의 묶음으로 나뉘고, 각 묶음에는 구하는 정수가 정확히 네 개씩 들어 있다. 따라서 개수는

$$4 \times 100\,000 = 400\,000.$$

이다. (포함–배제의 원리(inclusion–exclusion)로도 같은 결과를 얻는다: $10^6 - \frac{1}{2}10^6 - \frac{1}{5}10^6 + \frac{1}{10}10^6 = 400\,000$.)

평균을 구하기 위해, 이러한 각 n을 $10^6 - n$과 짝짓는다. n이 $1, 3, 7, 9$로 끝나면 $10^6 - n$은 각각 $9, 7, 3, 1$로 끝나고, $n \neq 0$이므로 $0 < 10^6 - n < 10^6$이다. 따라서 $n \mapsto 10^6 - n$은 이 집합을 자기 자신으로 보내며, 자기 자신이 역함수(inverse)이다. 또 $n = 500\,000$은 짝수이므로

고정점(fixed point)이 없다. 그러므로 이 집합은 합이 각각 10^6인 200 000개의 쌍으로 나뉜다. 전체 합은 $200\,000 \times 10^6$이고, 평균은

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

이다.

소문항 2: 3 또는 7로 나누어떨어지지 않는, 4179 미만의 수

수 4179는 신중하게 고른 것이다:

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n이 3 또는 7로 나누어떨어지는지는 n을 21로 나눈 나머지에만 달려 있다. 나머지 $0, 1, \ldots, 20$ 가운데 3의 배수는 $0, 3, \ldots, 18$(일곱 개)이고 7의 배수는 $0, 7, 14$(세 개)이며, 0은 양쪽에 모두 세어졌다. 따라서 $21 - 7 - 3 + 1 = 12$개의 나머지는 어느 쪽으로도 나누어떨어지지 않는다:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

정수 $0, 1, \ldots, 4178$은 정확히 21개짜리 완전한 묶음 199개로 이루어지므로, 개수는

$$12 \times 199 = 2388.$$

이다. 검산 삼아 포함–배제의 원리를 쓰면 $4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$이다.

> **생각해 보기** 수들이 십진법 자릿수와 아무 관계가 없는데도, 왜 여기서 대칭을 이용한 방법이 여전히 통할까?

핵심은 21이 4179의 약수라는 것이다. 그러면 $4179 - n \equiv -n \pmod 3$이고 $\pmod 7$에서도 마찬가지이므로, $3 \mid 4179 - n$일 필요충분조건은 $3 \mid n$이며, 7에 대해서도 같다. 또 $n = 0$은 제외되므로(모든 수로 나누어떨어진다) 집합의 모든 n은 $1 \le n \le 4178$을 만족하고, 그러면 $1 \le 4179 - n \le 4178$도 성립한다. 따라서 $n \mapsto 4179 - n$은 이 집합을 자기 자신으로 보낸다. 4179가 홀수이므로 고정점은 없다. 그러므로 2388개의 정수는 합이 각각 4179인 1194개의 쌍을 이루고, 평균은

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

이다.

검산

모든 정수를 하나하나 확인하는 컴퓨터 계산으로 개수 400 000과 2388, 평균 500 000과 2089.5가 정확히 맞음을 확인할 수 있다. 작은 경우를 손으로 확인해 볼 수도 있다. 21 미만

에서 위에 나열한 열두 개의 나머지를 더하면 $126 = 12 \times \frac{21}{2}$이므로, 그 평균은 $10.5 = \frac{21}{2}$로, 짝짓기 논증이 예측한 그대로이다.

흔한 실수

- "2 또는 5로 나누어떨어지지 않는다"를 "둘 다로는 나누어떨어지지 않는다", 즉 10으로 나누어떨어지지 않는다는 뜻으로 읽는 것. 그러면 900 000개의 정수가 나온다.
- 포함–배제의 원리에서 21의 배수(또는 10의 배수)는 두 번 빼졌으므로 다시 더해야 한다는 것을 잊는 것.
- 집합이 대칭인지 확인하지 않고 평균이 범위의 중점이어야 한다고 가정하는 것. 여기서 그것이 성립하는 것은 오직 10이 10^6을 나누고 21이 4179를 나누기 때문이다.

STEP 너머

$1, \ldots, m$ 가운데 m과 서로소(coprime)인 정수의 개수는 오일러(Euler)의 피 함수(totient function) $\varphi(m)$이다. 여기서 $\varphi(10) = 4$, $\varphi(21) = 12$이고, 개수는 $\varphi(10^6) = 400\,000$과 $199\,\varphi(21)$이다. 짝짓기 $n \leftrightarrow m - n$은 $m > 2$일 때 m과 서로소인 정수들의 합이 항상 $\frac{1}{2}m\,\varphi(m)$임을 보여 주며, 이 사실은 m을 법으로 하는 정수의 산술로 들어가는 첫걸음이다. 더 읽어 보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)이 훌륭한 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.