풀이

STEP III 1998, 문제 9

역학 • 관성 모멘트

STEP III 1998, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q9

핵심 아이디어

속이 찬 원뿔(solid cone)은 꼭짓점에서의 거리에 비례하여 반지름이 커지는 얇은 원판들을 쌓아 놓은 것이다. 얇은 원판의 관성 모멘트(moment of inertia)를 (원판의 축에 대해서, 그리고 지름에 대해서) 알고 있다면, 단 하나의 적분으로 조각들을 모두 더할 수 있다. 두 번째 축에 대해서는 수직축 정리(perpendicular axis theorem)(원판의 축에 대한 관성 모멘트를 지름에 대한 관성 모멘트로 바꾸기 위해)와 평행축 정리(parallel axis theorem)(그 축을 꼭짓점까지 옮기기 위해)가 필요하다. 그러면 진동은 복합 진자(compound pendulum)의 운동이 되고, 그 주기를 구하는 데 필요한 것이 바로 꼭짓점에 대한 관성 모멘트이다.

풀이

조각 나누기

꼭짓점을 원점에 두고 원뿔의 축을 z축 방향으로 잡아, 밑면이 평면 $z = h$가 되도록 한다. ρ를 (일정한) 밀도라 하자. 닮은 삼각형에 의해 높이 z에서의 단면은 반지름이

$$r = \frac{az}{h},$$

인 원판이다. 두께가 δz인 조각은 질량이 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$인 얇은 원판이다. 적분하면

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{따라서} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

축에 대한 관성 모멘트

질량이 M이고 반지름이 r인 균일한 원판의 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{2}Mr^2$이다. (원판을 반지름이 s이고 질량이 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$인 고리들로 나누면, 각 고리는 자신의 질량에 s^2을 곱한 만큼 기여하고, $\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$이다.)

원뿔의 모든 조각은 중심이 축 위에 있으므로, 조각들의 기여를 그냥 더하면 된다.

$$\begin{aligned} I_{\text{axis}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2}r^2\,\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\int_0^h z^4\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{3m}{a^2h}\cdot a^4h = \frac{3}{10}ma^2, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

꼭짓점을 지나는 축에 대한 관성 모멘트

두 정리를 사용한다.

- **수직축 정리.** 한 평면 위에 놓인 얇은 판(lamina)에 대하여, 평면에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 그 축과 같은 점에서 만나고 평면 위에 놓인 서로 수직인 임의의 두 축에 대한 관성 모멘트의 합과 같다.
- **평행축 정리.** 질량이 M인 물체의 질량 중심(centre of mass) G를 지나는 축에 대한 관성 모멘트가 I_G이면, 그 축과 평행하고 거리 d만큼 떨어진 축에 대한 관성 모멘트는 $I_G + Md^2$이다.

얇은 원판에서는 대칭성에 의해 두 지름이 동등하므로, 수직축 정리에 의해 $2I_{\text{diam}} = \frac{1}{2}Mr^2$, 즉 $I_{\text{diam}} = \frac{1}{4}Mr^2$이다.

꼭짓점을 지나고 밑면에 평행한 축 ℓ을 (예를 들어 x축 방향으로) 잡는다. 높이 z에 있는 조각의 질량 중심은 z축 위에 있어 ℓ로부터 거리 z만큼 떨어져 있고, ℓ에 평행한 그 조각의 지름은 이 중심을 지난다. 평행축 정리에 의해 이 조각의 기여는 $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I_{\text{apex}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2z^2}{4h^2} + z^2\right)\rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2h}\cdot\frac{a^2h^3}{5}\cdot\frac{a^2+4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2+4h^2\right). \end{aligned}$$

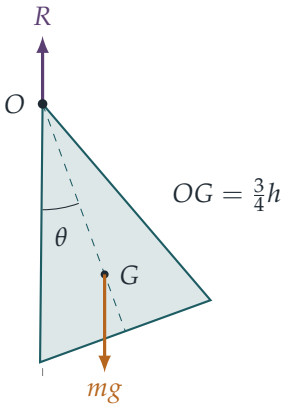
> ? **생각해 보기** 왜 원뿔 전체에 대해 질량 중심에서 옮기는 방식으로 평행축 정리를 한 번에 적용할 수 없을까?

적용할 수는 있지만, 아직 G를 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트를 모른다. 바로 그것을 계산해야 하는 것이다. 조각으로 나누면 이 문제를 피할 수 있는데, 각 원판의 자기 지름에

대한 관성 모멘트는 알려져 있고, 각 원판의 중심은 축 위에서 ℓ로부터 알려진 거리 z에 있기 때문이다. (덤으로 $I_G = I_{\text{apex}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2 + h^2)$도 얻는다.)

꼭짓점을 중심으로 한 미소 진동

원뿔을 꼭짓점을 지나고 운동 평면에 수직인 매끄러운 수평축을 중심으로 자유롭게 회전할 수 있는 강체(rigid body)로 모형화한다. 이러한 축은 밑면에 평행하므로, 이 축에 대한 관성 모멘트는 I_{apex}이다. θ를 원뿔의 축과 연직 아래 방향 사이의 각이라 하자.



축에서의 반력은 O에 대한 모멘트가 없으므로, 유일한 토크(torque)는 O로부터 거리 $\frac{3}{4}h$인 G에 작용하는 무게에 의한 것이다. 이 힘의 O에 대한 모멘트는 $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$이고, θ를 줄이는 방향으로 작용한다. 축에 대한 모멘트를 취하면

$$I_{\text{apex}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

미소 진동에서는 $\sin\theta \approx \theta$이므로

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2 + a^2}.$$

이것은 주기가

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{5gh}},$$

인 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 단위: $\frac{4h^2+a^2}{gh}$의 단위는 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot \mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$으로, 주기의 제곱이 가져야 할 단위와 같다.

- 가는 원뿔 ($a \to 0$): 모든 질량이 축을 따라 놓이고 $\int z^2 \,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$이므로, $I_{\text{apex}} \to \frac{3}{5}mh^2$과 일치한다. 주기는 $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$가 되어 길이가 $\frac{4}{5}h$인 단진자(simple pendulum)의 주기와 같다. 이 길이는 $\frac{3}{4}h$보다 긴데, 질량이 길이 방향으로 퍼져 있는 물체라면 마땅히 그래야 한다.
- 수치적으로, $m = 1$, $a = 0.7$, $h = 2.3$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 조각을 나누어 계산한 결과와 원뿔 안의 점들을 몬테카를로(Monte Carlo) 표본으로 추출하여 계산한 결과가 모두 $I_{\text{axis}} = 0.147$과 $I_{\text{apex}} \approx 3.2475$를 주어 공식과 일치했다. 또 $g = 9.81$로 두고 작은 진폭에서 출발하여 $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$를 단계적으로 수치 계산하면 주기가 2.7525 s로, 공식이 예측한 값과 같았다.

흔한 실수

- 두 번째 부분에서 각 조각에 대해 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$을 사용하는 것: 밑면에 평행한 축에 대해서는 원판이 자신의 지름을 중심으로 회전하므로, 기여는 $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$이 아니라 $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$이다.
- 질량 중심이 아닌 꼭짓점을 기준으로 평행축 정리를 적용하는 것: 이 정리는 두 축 중 하나가 질량 중심을 지날 때에만 성립한다.
- 원뿔을 길이가 $\frac{3}{4}h$인 단진자로 취급하는 것: 주기를 결정하는 것은 G의 위치만이 아니라 관성 모멘트이다.

STEP 너머

한 점을 지나는 임의의 축에 대한 관성 모멘트는 하나의 3×3 대칭 행렬, 즉 관성 텐서(inertia tensor)에 담겨 있다. 수직축 정리와 평행축 정리는 이 텐서가 회전과 평행이동에 따라 어떻게 변하는지를 보여 주는 특수한 경우이다. 이 텐서의 고유벡터(eigenvector)인 주축(principal axes)은 회전하는 물체가 어떤 축에 대해서는 안정적으로 돌고 다른 축에 대해서는 흔들리는 이유를 설명해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 강체의 회전과 복합 진자를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.