풀이

STEP III 1998, 문제 8

순수수학 • 구의 벡터 기하

STEP III 1998, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q8

핵심 아이디어

여기서는 모든 것이 같은 한 가지 방법으로 귀결된다. "점 $\mathbf{r}$이 구(sphere) 위에 있다"는 조건을 스칼라 방정식 $|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$으로 쓰고, 이를 내적(dot product)으로 전개한 다음 필요한 것을 읽어 내는 것이다. (i)의 직선에 대해서는 이것이 λ에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 교점의 개수는 그 판별식(discriminant)으로 결정된다. (ii)에서는 중심에서 평면까지의 거리가 필요하고, (iii)에서는 두 구의 방정식을 서로 빼면 "수직"이라는 조건이 묻는 바로 그 내적이 나온다.

풀이

소문항 (i)

점 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$이 구 위에 있을 필요충분조건은 $(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$이다. 이를 전개하고, $\mathbf{m}$이 단위벡터(unit vector)이므로 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$임을 이용하면

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

각 실근 λ는 교점 하나를 주고, 서로 다른 λ 값은 서로 다른 점을 준다($\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$이므로). 따라서 교점이 두 개일 필요충분조건은 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 것, 즉 판별식이 양수인 것이다.

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

이것이 구하는 조건이다.

교점이 정확히 하나인 경우는 판별식이 0일 때이다.

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

이때 중근은 $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$($\lambda$의 계수의 절반에 음의 부호를 붙인 것)이므로, 그 점은

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{이고} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

이며, 여기서도 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$을 이용하였다. 따라서 접선(tangent line)은 접점으로 향하는 반지름과 수직이며, 이는 당연히 그래야 하는 결과이다.

소문항 (ii)

$\mathbf{n}$에 수직인 평면의 방정식은 상수 k에 대하여 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$이고, $\mathbf{n}$이 단위벡터이므로 원점에서 이 평면까지의 거리는 $|k|$이다. $k \geq 0$이 되도록 $\mathbf{n}$의 부호를 정하면(즉 $\mathbf{n}$이 원점에서 평면 쪽을 향하도록 하면) 평면은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

생각해 보기 중심 $\mathbf{d}$는 이 평면에서 얼마나 떨어져 있는가?

$\mathbf{d}$에서 법선(normal) 방향으로 나아가 보자. 점 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$이 평면 위에 있을 조건은 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$이므로 $\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$이다. 이 점이 $\mathbf{d}$에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이므로, 중심에서 평면까지의 거리는 $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$이다.

평면이 구에 접할 필요충분조건은 이 거리가 반지름과 같은 것이다(거리가 더 작으면 평면은 구를 원 모양으로 자르고, 더 크면 둘은 만나지 않는다). 따라서 조건은

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{즉} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

다시 말해 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$이다. (만약 $\mathbf{n}$이 평면에서 멀어지는 쪽을 향한다면, 평면의 방정식은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$이고 조건은 $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$가 된다.)

소문항 (iii)

첫 번째 구는 중심이 O이고 두 번째 구는 중심이 D(위치벡터 $\mathbf{d}$)이며, 둘 다 반지름이 a이다. 점 $\mathbf{r}$이 두 구 위에 모두 있을 조건은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{그리고} \qquad (\mathbf{r}-\mathbf{d})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = a^2.$$

두 번째 식을 전개하여 첫 번째 식을 빼면 $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$이므로, 모든 교점은

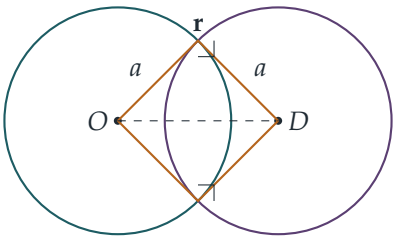
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

을 만족한다. 점 $\mathbf{r}$로 향하는 두 반지름은 벡터 $\mathbf{r}$(O에서)와 $\mathbf{r}-\mathbf{d}$(D에서)이다. 두 벡터가 수직일 조건은

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

가 o인 것이다. 우변은 어느 교점을 택했는지에 관계없으므로, $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=2a^2$이면 모든 교점에서 두 반지름이 수직이며, 이것이 보여야 할 내용이었다. (이 논증은 거꾸로도 성립한다. 공통점 단 하나에서라도 반지름들이 수직이면 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=2a^2$이다.)

이 경우 두 구는 실제로 만난다. $|\mathbf{d}|=\sqrt{2}\,a$는 0과 $2a$ 사이에 엄격하게 놓이므로, 두 구는 원을 따라 교차한다. O와 D를 지나는 단면을 보면 직각이 드러난다.



평면에서 반지름이 a인 두 원이 공통점에서 수직인 반지름을 가지면 OD는 직각이등변삼각형의 빗변이 되므로 $OD^2=a^2+a^2=2a^2$이다. 피타고라스(Pythagoras) 정리로도 같은 답을 얻는다.

검산

- (i)에서 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$으로 두자. 그러면 직선은 중심을 지나고 조건은 $a^2>0$이 되는데, 실제로 그러한 직선은 항상 구와 두 번 만난다.
- (ii)에서 구의 중심이 원점이면($\mathbf{d}=\mathbf{0}$) 조건은 $l=a$가 된다. 즉 평면이 중심에서 거리 a만큼 떨어져 있을 때 구에 접한다.
- 수치적으로, $a=1$이고 $|\mathbf{d}|=1.2$($\sqrt{2}$가 아님)일 때 교점 하나는 $(0.6,0.8,0)$이고 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d})=1-0.72=0.28\neq 0$이며, 이는 $a^2-\frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$와 일치한다. 세 소문항 모두에 대한 무작위 시험에서 결과가 10^{-13} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}=1$임을 잊어서 λ^2 앞에 불필요한 계수를 계속 달고 다니는 것.
- (ii)의 접할 조건을 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}-l=a$로만 쓰는 것. 중심은 평면의 어느 쪽에나 있을 수 있다.

STEP 너머

값 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$은 $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$, 즉 원점에서 직선까지 거리의 제곱이고, $\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$은 $\mathbf{b}$에서 $\mathbf{m}$ 방향 성분을 제거한 정사영(orthogonal projection)으로, 선형대수학의 핵심에

있는 개념이다. 직각으로 만나는 구들을 서로 직교한다(orthogonal)고 하며, 이들은 반전기하학(inversive geometry)과 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 모형에서 중심적인 역할을 한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 사영을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 직교하는 원들이 실제로 활약하는 모습을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.