풀이

STEP III 1998, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기와 적분

STEP III 1998, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q7

핵심 아이디어

첫 번째 함수는 아무렇게나 고른 준비 운동이 아니다. $\mathrm{b}(x)$를 미분(differentiate)하여 도함수(derivative)를 0으로 놓으면, 나타나는 방정식이 정확히 $\mathrm{f}(x/T)=0$이다. 따라서 f에 대해 알아낸 모든 것(양의 근이 하나뿐이고, 그 근이 2와 3 사이에 있다는 사실)이 b가 어디서 꺾이는지 알려 준다. B가 T에 의존하는 방식은 자연스러운 치환(substitution) $x=Tu$에서 나오는데, 이 치환은 피적분함수(integrand)에서 T를 없애 준다.

풀이

f의 개형 그리기와 m 구하기

$\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$이고

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^s(s-3)+\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^s(s-2).$$

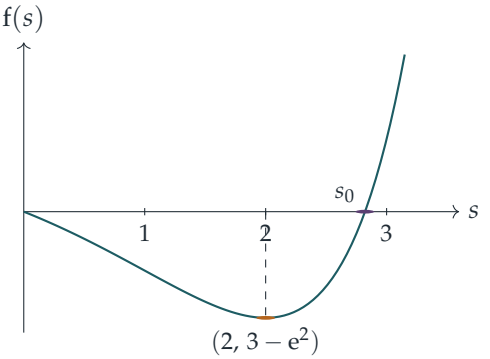
이다. $\mathrm{e}^s>0$이므로 f는 $[0,2]$에서 감소하고 $[2,\infty)$에서 증가하며, 최솟값은 $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^2\approx 3-7.29=-4.29$이다. $s\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^s(s-3)\to\infty$이므로 $\mathrm{f}(s)\to\infty$이다.

$\mathrm{f}(0)=0$이고 f가 $[0,2]$에서 순감소(strictly decreasing)하므로, $0<s\le 2$에서 $\mathrm{f}(s)<0$이다. $[2,\infty)$에서는 음수에서 $+\infty$까지 순증가하므로, 이 구간에서 어떤 $s_0>2$에서 정확히 한 번 0을 지난다. 따라서 s_0은 f의 **유일한** 양의 근이다.

$\mathrm{e}\approx 2.7$을 쓰면

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

이다. 그러므로 $\mathrm{f}(m)>0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수는 $m=3$이고, $2<s_0<3$이다(실제로 $s_0\approx 2.82$이다).



b의 유일한 극점

$u = x/T$라 하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$b'(x) = \frac{3x^2(e^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}e^{x/T}}{(e^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3e^u - 3 - u\,e^u\right)}{(e^u-1)^2} = -\frac{x^2\,f(u)}{(e^u-1)^2}.$$

이다. $x > 0$이면 $x^2 > 0$이고 $(e^u-1)^2 > 0$이므로, $b'(x) = 0$인 것은 정확히 $f(x/T) = 0$일 때이다. 앞 문항에 의해 이는 $x/T = s_0$일 때만 일어나므로, b는 $0 < x < \infty$에서 극점(turning point)을 단 하나 가지며 그 위치는

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

이다. 또한 $0 < u < s_0$에서 $f(u) < 0$이고 $u > s_0$에서 $f(u) > 0$이므로, 이 점 앞에서는 $b' > 0$이고 뒤에서는 $b' < 0$이다. 즉 이 점은 극대점이다.

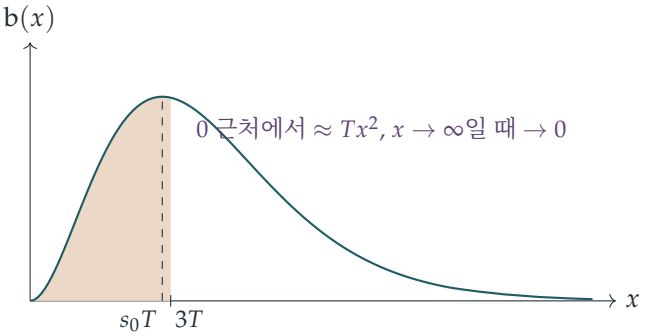
? **생각해 보기** 분자와 분모가 모두 0이 되는 $x = 0$ 근처에서 b는 어떤 모양일까?

x가 작을 때 $e^{x/T} - 1 \approx x/T$이므로

$$b(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

이고, 그래프는 기울기 0으로 포물선처럼 원점에서 출발한다. (따라서 $b(0) = 0$으로 두는 것이 자연스럽다.) x가 크면 지수함수가 어떤 거듭제곱보다도 빠르게 커지므로 $b(x) \approx x^3e^{-x/T} \to 0$이고, x축이 점근선(asymptote)이 된다. 모든 $x > 0$에 대해 $b(x) > 0$이므로, 그래프는 원점에서 올라가 $x = s_0T$에서 봉우리 하나를 이룬 뒤 축을 향해 감소한다.

앞 문항을 이용하면 봉우리의 높이는 $b(s_0T) = T^3s_0^3/(e^{s_0}-1) \approx 1.42\,T^3$이고, $b(3T) = 27T^3/(e^3-1)$은 이보다 아주 약간 작을 뿐이다.



(그림은 $T = 1$로 그렸으며, 색칠한 영역은 마지막 문항에서 사용한다.)

B의 꼴

$x = Tu$로 치환하면 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$이고, $T > 0$이므로 적분 구간의 끝 $0, \infty$는 바뀌지 않는다.

$$B = \int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,T\,\mathrm{d}u = T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

마지막 적분에는 T가 없으므로 이는 상수 K이다(유한하다고 가정해도 된다). 따라서 $B = KT^4$이고 $n = 4$이다.

K 어림하기

같은 치환과 $m = 3$을 쓰면

$$KT^4 = B \approx 2\int_0^{3T} \mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x = 2T^4\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u, \qquad \text{따라서} \qquad K \approx 2\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 이것은 ($T = 1$인) 그림에서 색칠한 넓이의 두 배이다. $\mathrm{e} \approx 2.7$을 써서 그래프의 높이를 읽으면

$$\mathrm{b}(0) = 0, \quad \mathrm{b}(1) \approx \frac{1}{1.7} \approx 0.59, \quad \mathrm{b}(2) \approx \frac{8}{6.29} \approx 1.27, \quad \mathrm{b}(3) \approx \frac{27}{18.7} \approx 1.45.$$

이다. 폭이 1인 띠로 사다리꼴 공식(trapezium rule)을 적용하면

$$\int_0^3 \approx \tfrac{1}{2}(0) + 0.59 + 1.27 + \tfrac{1}{2}(1.45) \approx 2.58,$$

이므로

$$K \approx 5.$$

이다. 더 거친 어림으로, 색칠한 영역을 밑변이 3이고 높이가 약 1.45인 삼각형으로 보면 넓이는 약 2.2이고 $K \approx 4.3$이다. 어느 쪽이든 K는 대략 4에서 5 사이이다. (곡선이 원점과 $(3, \mathrm{b}(3))$을 잇는 직선보다 위에 있으므로, 삼각형 어림은 분명히 실제보다 작다.)

검산

- 수치적 이분법(bisection)으로 구하면 f의 근은 $s_0 \approx 2.8214$이고, $T = 1.7$일 때 b′을 수치적으로 훑어보면 부호가 정확히 한 번, $x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$에서 바뀐다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $T = 0.5, 1, 2.3$에 대해 $B/T^4 \approx 6.4939$로 매번 같은 값이 나오므로 $n = 4$가 확인된다. 이는 알려진 정확한 값 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$와 일치한다.
- 적분값은 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$이므로, 문제에서 허용한 근사로는 $K \approx 5.10$이다. 우리가 얻은 어림 5는 거의 맞다. 6.49와의 차이는 문제의 근사 $B \approx 2\int_0^{3T}$에서 오는 오차이지, 우리 계산의 오류가 아니다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(0) = 0$임을 잊는 것. $s = 0$은 f의 근이지만 $x = 0$에 해당하며, 이는 $0 < x < \infty$ 밖에 있으므로 극점은 여전히 하나뿐이다.
- B에서 변수를 바꾸면서 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 T를 빠뜨려 $n = 3$을 얻는 것.

STEP 너머

함수 b는 흑체 복사(black-body radiation)에 대한 플랑크(Planck) 법칙이며, x는 진동수, T는 온도의 역할을 한다. 봉우리의 위치 $x = s_0 T$는 빈(Wien)의 변위 법칙이고, $B \propto T^4$는 슈테판–볼츠만(Stefan–Boltzmann) 법칙이다. 정확한 값 $K = \pi^4/15$는 $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{-ku}$로 전개하여 얻으며, 그러면 $K = 6\sum_{k\geq 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$이다. 이렇게 합과 적분의 순서를 바꾸는 것을 정당화하는 일은 대학 1학년 해석학(analysis)의 전형적인 문제이다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.