풀이

STEP III 1998, 문제 6

순수수학 • 다면체의 부피

> **STEP III 1998, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

핵심 아이디어

정육면체를 좌표축 위에 놓아, 꼭짓점(vertex)이 모든 좌표가 0 또는 a인 점들이 되게 한다. 그러면 거리는 3차원 피타고라스(Pythagoras) 정리로 구할 수 있고, 다루기 까다로운 입체는 정육면체에서 간단한 조각을 잘라 내어 부피를 잴 수 있다. 정사면체(regular tetrahedron)는 정육면체에서 네 모서리 부분을 잘라 내고 남은 것이고, 정팔면체(regular octahedron)는 밑면이 정사각형인 사각뿔(square-based pyramid) 두 개를 밑면끼리 맞붙인 것이다.

풀이

소문항 (i)

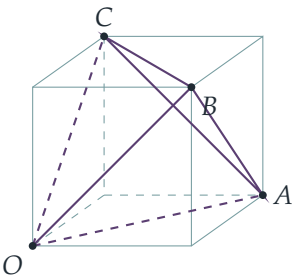
정육면체 $[0,a]^3$을 생각한다. 꼭짓점은 각 좌표가 0 또는 a인 여덟 개의 점 (x,y,z)이고, 두 꼭짓점은 정확히 한 좌표만 다를 때 인접(adjacent)한다(모서리로 연결된다).

어떤 네 꼭짓점을 고를 수 있는가? 좌표 가운데 a와 같은 것의 개수에 따라 꼭짓점을 **짝수** 꼭짓점 또는 **홀수** 꼭짓점이라 부르자. 모서리를 따라 움직이면 한 좌표가 바뀌므로 짝수와 홀수가 항상 서로 바뀐다. 고른 네 꼭짓점에 짝수 꼭짓점 P와 홀수 꼭짓점 Q가 함께 들어 있다고 하자. 둘은 인접하지 않으므로 세 좌표가 모두 다르다. 즉 Q는 P의 맞은편 꼭짓점이다. 나머지 꼭짓점은 모두 P나 Q에 인접하므로(홀수 꼭짓점 셋은 P에, 짝수 꼭짓점 셋은 Q에), 세 번째 꼭짓점을 더할 수 없다. 따라서 네 꼭짓점은 모두 짝수인

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

이거나 모두 홀수이다(이 집합을 평면 $x=\frac{1}{2}a$에 대하여 대칭이동한 것으로, 합동(congruent)인 입체를 준다).

정다면체임. O, A, B, C 가운데 어느 두 점이든 정확히 두 좌표가 각각 a만큼 다르므로, 여섯 개의 거리는 모두 $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a$이다. 따라서 네 면은 모두 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 정삼각형(equilateral triangle)이고, $OABC$는 정사면체이다. 각 모서리는 정육면체의 한 면의 대각선이다.



부피. 정육면체에서 정사면체를 빼면 네 개의 모서리 조각이 남는데, 홀수 꼭짓점마다 하나씩이다. 예를 들어 $(a,0,0)$에 있는 모서리 조각은 그 꼭짓점과 이웃한 세 꼭짓점 O, A, B로 이루어진 사면체이다. $(a,0,0)$에서 만나는 세 모서리는 서로 수직이고 길이가 a이므로, 이 조각은 넓이가 $\frac{1}{2}a^2$인 직각삼각형을 밑면으로 하고 높이가 a인 각뿔(pyramid)이며, 부피는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a = \frac{1}{6}a^3$이다. 따라서

$$V_{\text{사면체}} = a^3 - 4\cdot\tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{1}{3}a^3.$$

모서리의 길이가 1이려면 $\sqrt{2}\,a = 1$, 즉 $a = 1/\sqrt{2}$이고 $a^3 = 1/(2\sqrt{2})$이어야 한다. 따라서 모서리의 길이가 1인 정사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

생각해 보기 네 개의 모서리 조각과 정사면체가 겹치는 부분 없이 정육면체를 정확히 채우는 까닭은 무엇인가?

OAB와 같은 정사면체의 각 면은 정육면체의 꼭짓점을 정확히 하나, 여기서는 $(a,0,0)$을 잘라 낸다. O, A, B를 지나는 평면 $x-y-z=0$에 대하여 $(a,0,0)$은 엄밀히 한쪽에 있고, 나머지 일곱 꼭짓점은 반대쪽에 있거나 평면 위에 있다. 따라서 정육면체는 각 면 너머에 하나씩 있는 네 모서리 조각과 가운데의 정사면체로 나뉜다.

소문항 (ii)

모서리의 길이가 1인 정팔면체는 여섯 꼭짓점이

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

에 오도록 놓을 수 있고, 각 꼭짓점은 맞은편에 있지 않은 네 꼭짓점과 연결된다. 이렇게 연결된 두 꼭짓점, 예를 들어 $(h,0,0)$과 $(0,h,0)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}h = 1$이다. 따라서 열두 모서리의 길이는 모두 1이고, 팔분공간(octant)마다 하나씩 있는 여덟 면은 정삼각형이다. 평면 $z=0$ 위의 네 꼭짓점은 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이룬다. 정팔면체는 이 정사각형 위에 꼭대기가 $(0,0,\pm h)$이고 높이가 각각 h인 사각뿔 두 개를 놓은 것이다. 따라서

$$V_{\text{팔면체}} = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

더 일반적으로, 길이를 e배 하면 부피는 e^3배가 되므로, 모서리의 길이가 e인 정팔면체의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$이다.

소문항 (iii)

이번에는 한 변의 길이가 a인 정육면체의 중심을 원점에 두어 $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]^3$으로 놓는 편이 깔끔하다. 각 면의 중심은

$$(\pm\tfrac{1}{2}a, 0, 0), \quad (0, \pm\tfrac{1}{2}a, 0), \quad (0, 0, \pm\tfrac{1}{2}a).$$

이다. 이것은 정확히 소문항 (ii)의 배치에서 $h = \frac{1}{2}a$인 경우이다. 마주 보는 두 면의 중심 사이의 거리는 a이다. 이웃한 두 면의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = a/\sqrt{2}$이다. 이 여섯 점을 꼭짓점으로 하는 볼록(convex) 입체는 팔분공간마다 하나씩 여덟 개의 면을 가진다. 예를 들어 $x, y, z \geq 0$인 팔분공간에 있는 면은 꼭짓점이 $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}a, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2}a)$인 삼각형이다. 각 면은 한 변의 길이가 $a/\sqrt{2}$인 정삼각형이므로, 면의 중심들은 모서리의 길이가 $e = a/\sqrt{2}$인 정팔면체를 이룬다.

소문항 (ii)에 의하여 그 부피는

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

이다. 같은 정육면체의 꼭짓점 네 개를 꼭짓점으로 하는 소문항 (i)의 정사면체는 부피가 $\frac{1}{3}a^3$이다. $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3$이므로, 요구한 대로 정팔면체의 부피는 정사면체의 부피의 절반이다.

검산

- 밑넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 높이 $\sqrt{2/3}$으로 밑넓이와 높이를 이용한 공식을 쓰면 모서리의 길이가 1인 정사면체의 부피는 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0.11785$이고, 소문항 (i)과 일치한다.
- 모서리의 길이가 같으면 $\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$이므로 $V_{\text{팔면체}} = 4V_{\text{사면체}}$이다. 이는 모서리의 길이가 2인 정사면체를 모서리의 길이가 1인 정사면체 네 개(꼭짓점 쪽)와 모서리의 길이

가 1인 정팔면체 하나(가운데)로 나누는 고전적인 분할(dissection)과 맞아떨어진다. 단위 정사면체를 단위로 재면 $8 = 4 + 4$이다.

- 수치적으로, 서로 인접하지 않은 정육면체의 네 꼭짓점을 고르는 모든 경우에 대해 행렬식(determinant)으로 계산하면 단위 정육면체에서 부피 $\frac{1}{3}$을 얻었고, 영역 $|x| + |y| + |z| \leq 1/\sqrt{2}$에 대한 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값은 0.4715로, $\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$과 비교된다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 정육면체의 한 변을 1로 잡는 것: 그러면 정사면체의 모서리는 1이 아니라 $\sqrt{2}$이고, 부피를 $(1/\sqrt{2})^3$배로 다시 조정해야 한다.
- 엉뚱한 모서리 조각을 빼는 것: 모서리 조각은 여덟 개가 아니라 네 개(쓰지 않은 꼭짓점마다 하나씩)이고, 각각의 부피는 $\frac{1}{6}a^3$이다.
- 소문항 (iii)에서 정육면체의 한 변을 정팔면체의 모서리로 쓰는 것. 이웃한 면의 중심 사이의 거리는 $a/\sqrt{2}$이다.

STEP 너머

정육면체 안에 들어 있는 두 정사면체, 그리고 면의 중심으로 만든 정팔면체는 플라톤 다면체(Platonic solids)와 그 대칭군(symmetry group) 이야기의 출발점이다. 내접한 정사면체 하나를 보존하는 정육면체의 회전들은 위수(order) 12인 군(group)을 이루며, 이는 정육면체의 회전 24개 전체의 절반이다. 정육면체와 정팔면체는 서로 **쌍대**(dual)이고(한 쪽의 면의 중심이 다른 쪽의 꼭짓점이 된다), 이런 입체의 부피는 선형사상(linear map)이 부피를 몇 배로 바꾸는지를 재는 행렬식으로 깔끔하게 구해진다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식을 부피로 다루고, Armstrong의 *Groups and Symmetry*(군과 대칭)는 이 입체들의 대칭군을 연구한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.