풀이

STEP III 1998, 문제 4

순수수학 • 장미 곡선

STEP III 1998, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q4

핵심 아이디어

극곡선(polar curve)은 방정식이 단순할 때는 직교좌표(Cartesian) 형태로 바꾸어 보면 가장 쉽게 이해할 수 있고, 그렇지 않을 때는 r의 부호를 추적하면 된다. 문제 전체는 $r < 0$인 점을 **반대** 방향, 즉 $\theta + \pi$ 방향으로 거리 $|r|$만큼 떨어진 곳에 찍는다는 규약에 달려 있다. $r = \cos k\theta$에서는 이 규약에 따라 음의 고리가 새로운 자리에 놓여 새 꽃잎을 만드는지, 아니면 이미 그려진 꽃잎 위에 겹쳐지는지가 결정된다.

풀이

원 $r = \cos\theta$

양변에 r를 곱하고 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$을 이용하면

$$\begin{aligned} r^2 = r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

따라서 곡선 위의 모든 점은 중심이 $(\frac{1}{2}, 0)$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원 위에 있다.

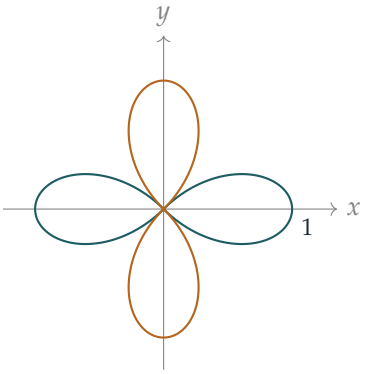
역으로, 이 원 위의 원점이 아닌 임의의 점 (x, y)를 잡자. $x = x^2 + y^2 > 0$이므로 이 점의 편각은 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$를 만족하고, $r^2 = x = r\cos\theta$를 $r > 0$으로 나누면 $r = \cos\theta$를 얻는다. 원점 자체는 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 지나게 된다. 그러므로 곡선은 정확히 이 원이며, θ가 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 한 번 그려진다. 이 범위에서는 항상 $r = \cos\theta \geq 0$이므로 부호 규약이 필요 없다.

곡선 $r = \cos 2\theta$

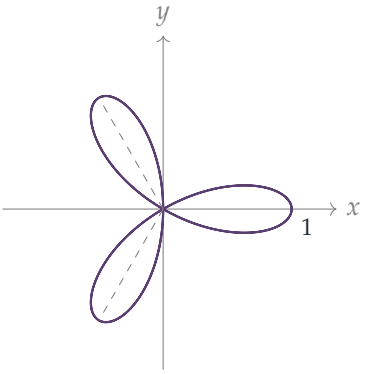
이제는 r의 부호가 바뀌므로, $r < 0$인 (r, θ)는 $\theta + \pi$ 방향으로 거리 $|r|$인 곳에 찍는다.

- $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$이면 $r > 0$이고, r는 0에서 시작해 $\theta = 0$에서 1까지 커졌다가 다시 0으로 돌아온다. 이것이 양의 x축 방향의 꽃잎이다.
- $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$이면 $r < 0$이므로 이 점들은 $\frac{5}{4}\pi$에서 $\frac{7}{4}\pi$까지의 방향에 그려진다. 이것이 음의 y축 방향의 꽃잎이다.
- 마찬가지로 $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ $(r > 0)$에서는 음의 x축 방향의 꽃잎이, $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$ $(r < 0)$에서는 양의 y축 방향의 꽃잎이 생긴다.

그 결과는 네 잎 장미 곡선으로, 각 꽃잎의 길이는 1이고, 두 축에 대해 대칭이며, 꽃잎끼리는 원점에서만 만난다. 그림에서 청록색 꽃잎은 $r > 0$에서, 호박색 꽃잎은 $r < 0$에서 나온 것이다.



$r = \cos 2\theta$



$r = \cos 3\theta$

곡선 $r = \cos 2n\theta$

$\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$이므로 n과 $-n$은 같은 곡선을 준다. 따라서 $n \geq 1$로 두자($n = 0$인 경우는 아래에서 다시 다룬다).

> **생각해 보기** $r < 0$일 때 고리는 이미 그려진 고리 위에 겹쳐질까, 아니면 새로운 곳에 놓일까?

$k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$에 대하여 $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$을 중심으로 하는 길이 $\pi/(2n)$인 구간에서 $r > 0$이다. 각 구간은 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ 방향, 즉 $\frac{\pi}{2n}$의 **짝수** 배 방향을 향하는 꽃잎을 하나씩 만든다.

$\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$을 중심으로 하는 구간에서는 $r < 0$이고, 이 점들은 $\theta + \pi$ 방향에 찍히므로

꽃잎은

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n} + \pi = (2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

즉 $\frac{\pi}{2n}$의 **홀수** 배 방향을 향한다. 따라서 음의 고리는 양의 꽃잎들 사이의 빈틈, 곧 새로운 곳에 놓인다.

그러므로 $r = \cos 2n\theta$는 합동인 꽃잎 $4n$개를 가진 장미 곡선이다. 각 꽃잎의 길이는 1이고, $m = 0, 1, \ldots, 4n-1$에 대하여 $m\pi/(2n)$ 방향을 향하며, 각 꽃잎은 각 $\pi/(2n)$을 차지하고, 이웃한 꽃잎은 원점에서만 만난다($n = 1$이면 위의 네 잎 장미 곡선이다). 꽃잎들이 차지하는 각의 합은 $4n \cdot \frac{\pi}{2n} = 2\pi$이므로, 꽃잎들은 겹치지 않고 한 바퀴 전체를 채운다.

퇴화된 경우인 $n = 0$에서는 곡선이 $r = 1$, 즉 단위원이 된다.

넓이는 n에 무관하다

꽃잎들이 겹치지 않으므로, θ가 0에서 2π까지 변할 때 둘러싸인 영역의 각 부분은 정확히 한 번씩 쓸린다. 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$(이 공식에는 r^2만 들어가므로 r의 부호는 상관없다)를 쓰면, $n \geq 1$에 대하여

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin 8n\pi = 0$을 이용하였다. 요구한 대로 이 값은 n에 의존하지 않는다. 꽃잎이 많아지는 만큼 각 꽃잎이 정확히 그만큼 가늘어지는 것이다. (제외된 경우인 $n = 0$, 곧 단위원의 넓이는 π이다. 공식의 $\sin 4n\theta/(4n)$ 항이 바로 $n \neq 0$이 쓰이는 곳이다.)

곡선 $r = \cos 3\theta$

> **생각해 보기** 이 곡선의 꽃잎은 왜 여섯 개가 아니라 세 개일까?

이제 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$를 중심으로 하는 구간에서 $r > 0$이고, 이 방향들로 꽃잎이 생긴다. 음의 고리는 $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$를 중심으로 하며, $\frac{4}{3}\pi, 2\pi, \frac{8}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$ 방향에 그려진다. 이것은 정확히 양의 꽃잎들의 방향이다. 실제로 θ를 $\theta + \pi$로 바꾸면 반대 방향으로

$$r = \cos(3\theta + 3\pi) = -\cos 3\theta$$

가 되므로 같은 점이다. 따라서 $r = \cos 3\theta$는 세 잎 장미 곡선으로, 길이 1인 꽃잎이 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 방향에 있고, 각 꽃잎은 각 $\frac{1}{3}\pi$를 차지하며, θ가 0에서 2π까지 변할 때 곡선 전체가 **두 번** 그려진다($0 \leq \theta \leq \pi$에서 한 번). 위의 오른쪽 그림이 이 곡선이다.

같은 논법으로, 홀수 k에 대하여 $r = \cos k\theta$는 두 번 그려지는 k잎 장미 곡선이고, 짝수 k에 대해서는 한 번 그려지는 $2k$잎 장미 곡선임을 알 수 있다.

검산

- $r = \cos\theta$에 $\theta = 0$을 대입하면 점 $(1, 0)$은 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 위에 있고, 원점($\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서)도 그렇다.
- 원 $r = \cos\theta$의 넓이는 $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$이고, $\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$와 일치한다. 마찬가지로 세 잎 장미 곡선에 대해 $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$이다. 여기서 0부터 2π까지 적분하면 두 번 세게 되어 $\frac{1}{2}\pi$가 나온다.
- 수치 검산: $n = 1, \ldots, 5$에 대하여 $r = \cos 2n\theta$를 그려 보면 꽃잎 끝이 $4n$개 나타나고, 몬테카를로(Monte Carlo) 방법으로 둘러싸인 영역의 넓이를 추정하면 매번 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$이 나왔다.

흔한 실수

- 음의 r를 무시하고 $r = \cos 2\theta$의 꽃잎을 두 개만 그리는 것.
- r의 고리가 여섯 개라는 이유로 $r = \cos 3\theta$의 꽃잎이 여섯 개라고 말하는 것. 음의 고리는 양의 고리 위에 겹쳐진다.
- 두 번 그려지는 곡선($r = \cos 3\theta$ 등)에 $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$를 사용하여 넓이를 두 배로 계산하는 것.

STEP 너머

이 곡선들을 **로도니아**(*rhodonea*) 곡선 또는 장미 곡선(rose curve)이라고 한다. 점을 복소수 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 나타내면, 장미 곡선 $r = \cos k\theta$는 $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$, 즉 서로 반대 방향으로 도는 두 원운동의 합이다. 이 관점은 장미 곡선을 주전원(epicycle) 및 푸리에 급수(Fourier series)와 연결해 주며, 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$는 벡터 해석학의 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수를 이렇게 기하학적으로 바라보는 방법을 아름답게 펼쳐 보인다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.