풀이

STEP III 1998, 문제 3

순수수학 • 선형 점화식

> **STEP III 1998, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q3

핵심 아이디어

이 문제는 상수항이 있는 1계 선형 점화식(first-order linear recurrence)으로, 미분방정식 $y' = cy - d$의 이산적인 사촌이다. 요령은 상미분방정식(ODE)의 경우와 같다. 먼저 상수("평형(equilibrium)") 해를 찾고, 그 해로부터의 편차가 매일 같은 인수만큼 곱해질 뿐임을 알아차리는 것이다. 극한에서 실제로 해야 할 일은 $c \to 0$일 때 $((1+c)^N - 1)/c$가 어떻게 되는지 이해하는 것뿐이며, 이는 이항정리(binomial theorem)로 해결된다.

풀이

$c > 0$일 때 풀기

모든 T에 대하여 $V_T = Ak^T + B$ 꼴을 시도한다. 이를 점화식에 대입하면

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)(Ak^N + B) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N(k - (1+c)) = cB - d.$$

우변은 N에 의존하지 않지만, 좌변은 0이 되지 않는 한 N에 의존한다($A \neq 0$이고 $k \neq 0$이어야 하며, 그렇지 않으면 이 꼴은 단지 상수일 뿐이다). 따라서 모든 N에 대하여 양변이 모두 0이어야 한다.

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

여기서 $c > 0$이므로 c로 나누어도 문제없다. 이 값들을 쓰면 임의의 상수 A에 대하여 $V_T = A(1+c)^T + d/c$가 점화식을 만족한다. $T = 0$을 대입하면 $V_0 = A + d/c$이므로 $A = V_0 - d/c$이고

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

생각해 보기 꼴을 추측했더니 맞아떨어졌다. 다른 해가 없다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

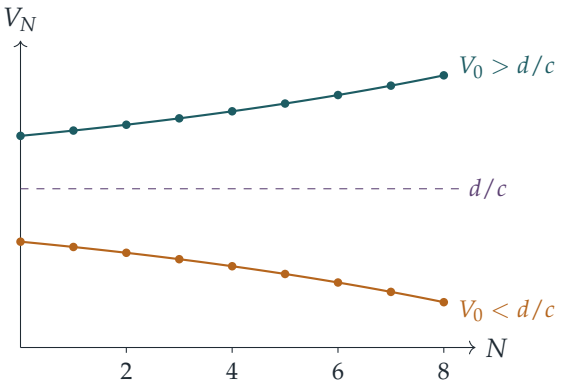
점화식은 V_0으로부터 V_1을, 다시 V_1로부터 V_2를 결정하는 식으로 계속되므로, 주어진 V_0을 갖는 수열은 정확히 하나뿐이다. 우리가 구한 식은 점화식을 만족하고 올바른 V_0을 가지므로 바로 그 수열이다. (직접적인 논증을 원한다면 $U_N = V_N - d/c$로 놓아 보자. 그러면 점화식은 $U_{N+1} = (1+c)U_N$이 되어 $U_N = (1+c)^N U_0$이고, 이는 같은 답이다.)

답을 다음과 같이 정리해 두면 유용하다.

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

이 식은 깔끔하게 해석된다. 첫째 항은 하루에 비율 c로 증가하는 V_0이고, 둘째 항은 $d(1 + (1+c) + \cdots + (1+c)^{N-1})$로, 매일의 공제액이 각각 남은 날 동안 불어난 것을 등비급수(geometric series)로 합한 것이다.

상수 d/c는 평형값이다. $V_0 > d/c$이면 채권은 한없이 커지고, $V_0 = d/c$이면 그대로 머물며, $V_0 < d/c$이면 점점 더 빠르게 떨어진다.



(그림은 $c = 0.1$, $d/c = 5$이고 $V_0 = 6$, $V_0 = 4$인 경우이다.)

$c = 0$인 경우

이제 점화식은 $V_{N+1} = V_N - d$이다. 값이 매일 d씩 줄어드는 등차수열(arithmetic progression)이다. 따라서

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

d/c 때문에 $c > 0$일 때의 식에 단순히 $c = 0$을 대입할 수는 없다는 점에 주목하자. 바로 이 때문에 문제에서 극한을 묻는 것이다.

$c \to 0$일 때의 극한

N을 고정하고 $(*)$를 이용한다. 고정된 N에 대하여 $(1+c)^N \to 1$이므로 첫째 항은 V_0으로 수렴(converge)한다. 둘째 항은 이항정리로 전개한다.

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{따라서} \quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

N이 고정되어 있으므로 이것은 유한개의 항을 갖는 c에 대한 다항식이고, 첫째 항 이후의 모든 항은 c의 양의 거듭제곱을 포함한다. 그러므로 $c \to 0$일 때 이 식은 N으로 수렴하고

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

이는 요구한 대로 $c = 0$일 때의 해이다. (같은 말로, $\big((1+c)^N - 1\big)/c$는 $x = 1$에서 x^N의 차분몫(difference quotient)이므로, 그 극한은 미분계수 N이다.)

"고정된 N에 대하여"라는 말이 중요하다. c가 작더라도 N이 크면 $\binom{N}{2}c$ 같은 항이 작다는 보장이 없고, 결국에는 지수적 증가가 선형적인 행동을 이긴다.

검산

- $N = 1$: 식에서 $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$를 얻으며, 이는 점화식 그 자체이다.
- $V_0 = d/c$이면 모든 N에 대하여 $V_N = d/c$, 즉 평형이다.
- 수치적으로 $V_0 = 7, d = 2, N = 12$일 때, 식은 $c = 0.01$에서 $V_{12} \approx -17.48$, $c = 10^{-4}$에서 -17.005를 주어 $V_0 - 12d = -17$에 가까워진다. 또한 닫힌 형태의 식은 여러 무작위 유리수 경우에 직접 반복 계산한 결과와 정확히 일치한다.

흔한 실수

- $B = -d/c$로 잡는 실수: 부호는 $cB - d = 0$에서 나오므로 $B = +d/c$이다.
- $A = V_0 - d/c$ 대신 $A = V_0$을 쓰는 실수: 상수 B도 $T = 0$에서 기여한다.
- $c > 0$일 때의 식에 $c = 0$을 직접 대입하려는 실수: 정의되지 않으므로 극한이 필요하다.

STEP 너머

이와 같은 점화식은 **선형 차분방정식**(*linear difference equation*)이며, 그 이론은 선형 상미분방정식과 나란히 전개된다. 일반해는 특수해(여기서는 상수해)에 동차방정식

$U_{N+1} = (1+c)U_N$의 일반해를 더한 것이다. 금융에서 이것은 고정 상환액을 갖는 대출이나 연금의 공식이며, $c \to 0$ 극한은 복리에서 단리로의 이행에 해당한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 상미분방정식 이론과 함께 1계 차분방정식을 다루는 절이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.