풀이

STEP III 1998, 문제 2

순수수학 • 베타 적분의 점화식

> **STEP III 1998, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q2

핵심 아이디어

이 적분은 모습을 바꾼 베타 함수(beta function)이다. 각 소문항마다 표준적인 기법이 하나씩 필요하다. 소문항 (i)에서는 t와 $1-t$의 역할을 맞바꾸는 반사(reflection) $t \mapsto 1-t$를 이용한다. 소문항 (ii)에서는 피적분함수(integrand)에 $1 = t + (1-t)$를 곱한다. 소문항 (iii)에서는 부분적분(integration by parts)을 하여 $(1-t)$의 거듭제곱 하나를 t 쪽으로 옮긴다. $(1-t)$의 지수가 없어질 때까지 소문항 (iii)을 되풀이하면 곧바로 계산할 수 있는 적분이 남는다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1-t$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝 $t = 0, 1$은 $u = 1, 0$이 된다.

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \, (-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \, \mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 끝을 다시 0과 1 순서로 바꾸는 데 쓰인다.

소문항 (ii)

$t + (1-t) = 1$이므로 피적분함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b(t + (1-t)) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

각 항을 $[0,1]$에서 적분하면 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$을 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

$(1-t)^b$를 미분하고 t^a를 적분하는 방식으로 $\mathrm{I}(a,b)$를 부분적분한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot(-b(1-t)^{b-1})\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

생각해 보기 경계항(boundary term)은 왜 사라지며, a와 b가 양수라는 조건은 어디에서 필요한가?

$t=1$에서는 $b>0$이므로 인수 $(1-t)^b$가 0이다. $t=0$에서는 $a+1>0$이므로 인수 t^{a+1}이 0이다. 따라서 괄호 부분은 영이 되고, 양변에 $a+1$을 곱하면

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

을 얻으며, 이것이 구하는 결과이다. ($0<b<1$이면 마지막 적분에는 $(1-t)$의 음의 거듭제곱이 나타난다. 그래도 $b-1>-1$이므로 이 적분은 수렴(converge)한다. 아래의 정수인 경우에는 어차피 항상 $b-1\geq 0$이다.)

정수 a,b에 대한 $\mathrm{I}(a,b)$의 계산. 결과를 $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1)$로 쓰고 이를 거듭 적용한다. 한 단계마다 첫째 인자는 1만큼 커지고 둘째 인자는 1만큼 작아진다. 둘째 인자가 0에 이르면 멈춘다.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

공식을 쓸 때마다 둘째 인자가 양의 정수이므로 모든 단계가 정당하다. 이제 $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$이다. 또 $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$이므로

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

이다. 소문항 (i)에서 요구하는 대로 이 공식은 a와 b에 대하여 대칭이다. 또한 a 또는 b가 0일 때에도 성립한다.

검산

▶ $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이고, 공식으로 구하면 $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$이다.

- 공식은 소문항 (ii)를 만족한다. $\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!} + \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구하면 $\mathrm{I}(2,3) \approx 0.0166667$이고, 이는 $\frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}$과 일치한다. 또한 정수가 아닌 임의의 a, b에 대하여 수치 적분(quadrature)으로 소문항 (i)–(iii)을 확인하였으며, 약 10^{-11} 이내에서 일치하였다.

흔한 실수

- 부분적분을 반대 방향으로 하는 것. t^a를 미분하면 $(1-t)$의 지수가 올라가므로 잘못된 방향이다.
- 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 것. 경계항은 $a+1 > 0$이고 $b > 0$이기 때문에만 사라진다.
- 점화(recursion)를 한 단계 일찍 멈추거나, $\mathrm{I}(a+b, 0)$에서 나오는 마지막 인수 $\frac{1}{a+b+1}$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$\mathrm{I}(a,b)$는 베타 함수 $B(a+1, b+1)$이다. 모든 양의 실수 인자에 대하여 이 함수는 $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$에 의해 감마 함수(gamma function)와 연결된다. 우리가 얻은 답은 $\Gamma(n+1) = n!$인 특수한 경우이다. 확률론에서 $t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$는 베타 분포(beta distribution)의 확률밀도함수(density)이며, 베타 분포는 베이즈 통계학(Bayesian statistics)에서 핵심적인 역할을 한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 답이 왜 $a!\,b!/(a+b+1)!$인지 설명하는 세기 논증을 비롯하여 이 주제가 매력적으로 다루어져 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.