풀이

STEP III 1998, 문제 12

확률과 통계 • 네트워크 신뢰도

STEP III 1998, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q12

핵심 아이디어

도로는 여섯 개뿐이므로 열린 도로와 막힌 도로의 패턴은 $2^6 = 64$가지뿐이다. 가장 깔끔한 방법은 **나쁜** 패턴, 즉 마을들이 서로 오갈 수 없는 무리로 나뉘는 패턴을 세는 것이다. 나쁜 패턴을 열려 있는 도로의 개수에 따라 분류하면 계산이 매우 짧아진다. 마을 네 개에 열린 도로가 네 개 이상인 연결망은 결코 끊어질 수 없기 때문이다.

시작하기 전에 주의할 점이 있다. 시험지에 인쇄된 공식에는 괄호 앞에 p^2이 있지만, 올바른 인수는 p^3이다. 인쇄된 식이 옳을 수 없다는 것은 검산에서 보인다. 여기서는 다음과 같이 고친 결과를 증명(proof)한다.

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

풀이

주어진 도로가 열려 있을 확률(probability)을 $q = 1 - p$라 하자. 도로들은 서로 독립(independent)이므로, k개의 도로가 열리고 $6 - k$개가 막힌 특정한 패턴 하나의 확률은 $q^k p^{6-k}$이다. 연결망이 **끊어진**(disconnected) 사건, 즉 어떤 마을에서 다른 어떤 마을로 갈 수 없는 사건을 D라 하자. 그러면 $P = 1 - \mathbb{P}(D)$이고, $\mathbb{P}(D)$는 끊어진 모든 패턴에 대한 $q^k p^{6-k}$의 합이다. 이 패턴들을 열린 도로의 개수 k에 따라 센다.

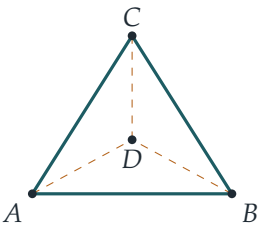
열린 도로가 네 개 이상: 결코 끊어지지 않는다. 연결망이 끊어져 있으면 마을들은 적어도 두 무리로 나뉘고, 서로 다른 무리 사이에는 열린 도로가 없다. 가능한 분할은 $1 + 3$(외딴 마을 하나와 나머지 세 마을)과 $2 + 2$뿐이다. 열린 도로는 모두 무리 안에 있다. $1 + 3$ 분할에서 세 마을 무리 안의 도로는 3개뿐이고, $2 + 2$ 분할에서는 각 쌍 안에 도로가 1개씩이므로 모두 2개뿐이다. 어느 경우든 열린 도로는 많아야 3개이다. 따라서 열린 도로가 $k \geq 4$개인

패턴은 모두 연결되어 있다.

열린 도로가 정확히 세 개.

? **생각해 보기** 열린 도로가 세 개일 때, 어떤 패턴이 네 마을을 모두 연결하지 못하는가?

위의 논증에 따르면, 열린 도로가 세 개인 끊어진 패턴은 세 마을 무리 사이의 도로 세 개가 모두 열린 $1+3$ 분할이어야 한다. 즉 **삼각형**(triangle)이 이루어지고 네 번째 마을은 고립된다. 고립되는 마을을 고르는 방법이 4가지이므로 이러한 패턴은 4개이다. (나머지 $\binom{6}{3}-4=16$개의 패턴은 사면체의 생성나무(spanning tree)이며, 모두 연결되어 있다.)



열린 도로 AB, BC, CA (실선);
D로 가는 막힌 도로 (점선):
D가 고립된다

열린 도로가 두 개 이하: 항상 끊어진다. 네 마을을 잇려면 도로가 적어도 세 개 필요하다(도로 하나는 A에서 이미 갈 수 있는 무리에 새 마을을 많아야 하나 붙일 수 있다). 따라서 열린 도로가 두 개인 $\binom{6}{2}=15$개의 패턴, 한 개인 6개의 패턴, 하나도 없는 1개의 패턴은 모두 끊어져 있다.

모두 더하기. 따라서

$$\mathbb{P}(D)=4p^3q^3+15p^4q^2+6p^5q+p^6=p^3\left(4q^3+15pq^2+6p^2q+p^3\right).$$

이제 $q=1-p$를 대입하여 괄호를 전개한다.

$$\begin{aligned}4(1-p)^3&=4-12p+12p^2-4p^3,\\15p(1-p)^2&=15p-30p^2+15p^3,\\6p^2(1-p)&=6p^2-6p^3,\\p^3&=p^3.\end{aligned}$$

더하면 상수항은 4이고, p항은 $-12p+15p=3p$, p^2항은 $12-30+6=-12$, p^3항은 $-4+15-6+1=6$이다. 따라서

$$\mathbb{P}(D)=p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right),\qquad \text{그러므로}\qquad P=1-p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right).$$

검산

- $p = 0$(어떤 도로도 막히지 않음)이면 $P = 1$이고, $p = 1$이면 $P = 1 - (6 - 12 + 3 + 4) = 0$이다. 둘 다 맞지만, p^2 식에서도 둘 다 성립하므로 이것만으로는 두 식을 구별할 수 없다.
- 작은 p로 두 식을 구별할 수 있다. 연결망이 끊어지려면 막힌 도로가 적어도 세 개(예를 들어 한 마을에 닿는 세 도로) 필요하므로, p가 작을 때 $\mathbb{P}(D)$는 약 $4p^3$이어야 한다. 우리 공식은 $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$을 주지만, 인쇄된 공식은 $4p^2$을 주게 되므로 불가능하다.
- $p = \frac{1}{3}$일 때 우리 공식은 $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$을 준다. p의 값 21개에서 64개 패턴을 모두 컴퓨터로 열거한 결과는 p^3 공식과 정확히 일치하며, $p = 0.4$에서 눈 내림을 200 000번 모의실험(simulation)한 결과는 공식의 값 0.7655에 대해 0.767이었다.

흔한 실수

- 고립된 마을이 있는 경우만 세고 $2 + 2$ 분할을 확인하지 않는 것. 여기서는 $2 + 2$ 분할이 새로운 것을 더하지 않는다. $2 + 2$ 분할에서는 열린 도로가 많아야 두 개이므로 그러한 패턴은 이미 "두 개 이하" 경우에 포함되어 있다. 그래도 이 사실은 밝혀야 한다.
- "A가 고립된다"와 "B가 고립된다"처럼 겹치는 사건들의 확률을 겹치는 부분을 보정하지 않고 더하는 것. 패턴 전체를 세면 중복해서 세는 일을 피할 수 있다.
- 인쇄된 p^2을 믿고 계산을 억지로 끼워 맞추는 것. 정직하게 계산한 결과가 "보여라" 문제와 맞지 않으면 특수한 경우를 시험해 보라.

STEP 너머

이것은 **연결망 신뢰도**(network reliability)의 작은 예이다. 그래프(graph)의 각 변이 독립적으로 끊어질 때, 남은 그래프가 연결되어 있을 확률을 구하는 것이다. 답은 항상 p에 대한 다항식이며, 그 계수는 연결된 생성 부분그래프(connected spanning subgraph)의 개수를 센다(여기서는 열린 도로가 6, 5, 4, 3개일 때 1, 6, 15, 16). 큰 그래프에서는 이를 구하는 것이 계산적으로 어렵고, 터트 다항식(Tutte polynomial) 및 스며들기 이론(percolation theory)과 밀접하게 관련되어 있다. 확률 쪽의 기초를 다지려면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋고, Bollobás의 *Modern Graph Theory*(현대 그래프 이론)는 무작위 그래프와 터트 다항식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.