풀이

STEP III 1998, 문제 11

역학 • 큰 진폭의 진자

STEP III 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.3 절 **실제 진자**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/real-pendulum.html

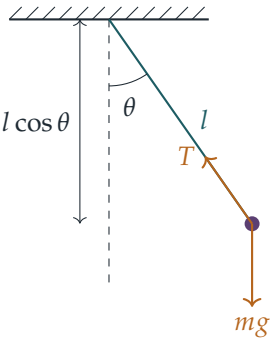
핵심 아이디어

에너지 보존(energy conservation)을 이용하면 모든 각도에서의 각속도(angular speed)를 구할 수 있고, 주기(period)는 4분의 1 진동에 걸리는 시간의 네 배, 곧 $\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$의 네 배이다. 반각 공식(half-angle identity) $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$를 쓰면 에너지 방정식이 피적분함수(integrand)의 꼴로 바뀐다. 제시된 치환(substitution)은 $\theta = \gamma$에서 생기는 성가신 무한대를 없애고, x가 작은 $(1-x)^{-1/2}$ 꼴의 피적분함수를 남긴다. 이것이 바로 이항 전개(binomial expansion)가 쓰이는 상황이다.

풀이

에너지 방정식

진자(pendulum)를 길이가 l이고 가벼우며 늘어나지 않는 줄에 매달린 질량 m인 입자로 모형화하고, 공기 저항 없이 연직 평면에서 흔들린다고 하자. θ는 연직 아래 방향으로부터 잰다.



추는 매달린 점보다 $l\cos\theta$만큼 아래에 있다. 장력(tension)은 줄을 따라 작용하여 추의 속도(호를 따르는 방향)에 수직이므로 일을 하지 않는다. 일을 하는 것은 중력뿐이므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 추의 속력은 $l\dot{\theta}$이다.

가장 큰 각도 $\theta = \gamma$에서 추는 순간적으로 정지한다. 그 지점에서 일반적인 각도 θ까지 추는 높이 $l\cos\theta - l\cos\gamma$만큼 내려오므로

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta - \cos\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma),$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

주기

두 코사인에 모두 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$를 적용하면

$$\cos\theta - \cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big),$$

이므로 에너지 방정식은

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big).$$

이 된다. 대칭성(운동은 가역적이고, 에너지 방정식은 $\theta \mapsto -\theta$에 대해 변하지 않는다)에 의해 네 번의 4분의 1 진동 $0 \to \gamma \to 0 \to -\gamma \to 0$에 걸리는 시간은 모두 같다. $\theta = 0$에서 $\theta = \gamma$까지의 4분의 1 진동 동안 θ는 증가하므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}.$$

0부터 γ까지 적분하고 4를 곱하면

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big)^{-1/2}\,\mathrm{d}\theta,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (피적분함수는 추가 정지해 있는 $\theta = \gamma$에서 무한대로 발산하지만 적분은 수렴(converge)한다. 아래의 치환이 이를 명시적으로 보여 준다.)

작은 진폭 근사

$k = \sin(\gamma/2)$라 하고, $0 < \gamma < \pi$이므로 $0 < k < 1$이다. 이제 $\sin(\theta/2) = k\sin\phi$로 놓자. θ가 0부터 γ까지 변할 때 $\sin\phi$는 0부터 1까지 변하므로 ϕ는 0부터 $\pi/2$까지 변한다. 미분하면

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

$0 \le \theta/2 < \pi/2$이고 $0 \le \phi \le \pi/2$이므로 두 코사인 모두 음이 아니다. 따라서

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}, \qquad \left(k^2 - k^2\sin^2\phi\right)^{1/2} = k\cos\phi.$$

생각해 보기 이 치환을 하면 골칫거리인 인수 $(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2))^{-1/2}$는 어떻게 되는가?

이 인수는 $1/(k\cos\phi)$가 되고, $\mathrm{d}\theta$에 들어 있는 $k\cos\phi$가 이를 정확히 상쇄한다.

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2 - \sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}} = \frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

따라서

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

이며, 이 적분의 피적분함수는 전혀 문제가 없다. (여기까지는 정확한 식이다.)

γ가 작을 때 $x = k^2\sin^2\phi$는 $0 \le x \le k^2$를 만족하여 작으므로, 이항 전개 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$에 의해

$$\left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

이고, 오차는 k^4 차수이다. $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{4}$이므로

$$P \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

마지막으로, γ가 작을 때 $k = \sin(\gamma/2) \approx \gamma/2$(오차는 γ^3 차수)이므로 γ^4 차수의 항을 무시하면 $k^2 \approx \gamma^2/4$이고,

$$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 주된 항은 익숙한 작은 진동의 주기이고, 보정항은 크게 흔들릴수록 시간이 조금 더 걸린다는 것을 말해 준다.

검산

- $\gamma \to 0$이면 선형화(linearised)된 방정식 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$에서 얻는 주기 $2\pi\sqrt{l/g}$를 다시 얻는다.
- 차원(dimensions): $\sqrt{l/g}$는 시간이고, γ는 차원이 없다.
- 수치적으로, $l/g = 1.7/9.81$이고 $\gamma = 0.5$일 때 방정식 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$를 정밀한 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $P = 2.65705$를 얻는데, 이는 정확한 ϕ-적분과 표시된 모든 자릿수까지 일치한다. 근사식은 2.65646을 주며, 상대 오차는 약 2×10^{-4}이다. 이 오차는 γ^4에 비례하므로(약 $0.0036\gamma^4$), γ^2 항이 옳다는 것이 확인된다.

흔한 실수

- 인수 4를 빠뜨리는 것: 0부터 γ까지의 적분은 주기의 4분의 1일 뿐이다.
- 전개하기 전에 치환 과정에서 $\cos(\theta/2) \approx 1$을 쓰는 것. 이렇게 하면 구하려는 보정항과 같은 차수인 $k^2\sin^2\phi$ 항이 버려진다. 이항 전개 단계까지 $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$를 정확히 유지해야 한다.
- $k = \sin(\gamma/2)$를 $\gamma/2$로 바꾸지 않고 $1 + k^2/4$에서 멈추는 것.

STEP 너머

정확한 적분 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$는 **제1종 완전 타원 적분**(*complete elliptic integral of the first kind*) $K(k)$이므로, 정확한 주기는 $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$이다. 이항 급수를 계속 전개하면 $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$를 얻으며, 가우스(Gauss)는 산술–기하 평균(arithmetic–geometric mean)을 이용하면 K를 놀라울 만큼 빠르게 계산할 수 있음을 발견했다. 주기가 진폭(amplitude)에 따라 달라진다는 사실은 비선형 진동(nonlinear oscillation)의 가장 간단한 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진자와 진동을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.