풀이

STEP III 1998, 문제 10

역학 • 비스듬한 충돌

> **STEP III 1998, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q10

핵심 아이디어

두 질량이 같으면 두 보존 법칙(conservation laws) 모두에서 질량이 소거되어, 깔끔한 벡터 명제 두 개가 남는다. 속도의 **합**이 변하지 않고, **속력의 제곱의 합**이 변하지 않는다는 것이다. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$을 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$과 비교하면 스칼라곱(scalar product) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$만 따로 떼어 낼 수 있고, 이 하나의 양이 문제의 모든 부분을 이끌어 간다. 마지막 부분에서는 두 번째 공의 속도를 알면 운동량(momentum)이 첫 번째 공의 속도를 결정하므로, 에너지 방정식은 미지의 속력 하나에 대한 이차방정식(quadratic)이 되고, 실근을 갖는 이차방정식의 판별식(discriminant)은 음이 아니다.

풀이

두 공을 매끄러운 탁자 위에서 움직이는, 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 모형화한다. 그러면 충돌하는 동안 작용하는 수평 방향의 힘은 두 공이 서로에게 가하는 힘뿐이다.

보존 법칙과 상대 속력

운동량과 운동 에너지(kinetic energy)로부터

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

즉

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

를 얻는다. (1)의 각 변을 자기 자신과 스칼라곱하면

$$|\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2+2\,\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2+2\,\mathbf{v}_1'\cdot\mathbf{v}_2'.$$

이다. 여기서 (2)를 빼면

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

이 남는다. 이제 상대 속력(relative speed)의 제곱은

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

이고, (2)와 (3)에 의해 우변의 각 항은 충돌 후에도 충돌 전과 같다. 따라서 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$이고, 속력은 음이 아니므로 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$이다. 즉 상대 속력은 보존된다.

처음에 한 공이 정지해 있는 경우

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$이라 하자. 그러면 (3)에서

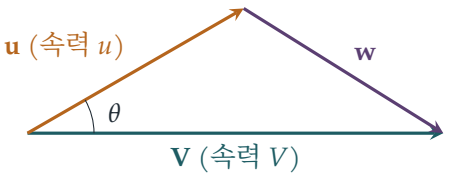
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

을 얻는다. 충돌 후 두 공이 모두 움직이므로 $\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$이다. 따라서 스칼라곱이 0이라는 것은 두 나중 속도가 서로 수직이라는 뜻이다. (이 조건이 없으면 한 속도가 영벡터라서 스칼라곱이 0이 될 수도 있다. 정면충돌에서 두 공이 단순히 속도를 맞바꾸는 경우가 그렇다.)

에너지를 잃는 충돌

이제 (1)은 여전히 성립하지만 (2)는 성립하지 않는다. 정지해 있는 공을 A, 움직이는 공을 B라 하자. B는 속도 $\mathbf{V}$ ($|\mathbf{V}| = V$)로 출발하여, $\mathbf{V}$와 각 θ를 이루는 속력 u의 속도 $\mathbf{u}$로 끝난다고 하자. A의 나중 속도를 $\mathbf{w}$라 하자.

운동량으로부터 $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$이므로, 세 속도는 삼각형을 이룬다.



따라서 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$이고, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$이므로

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

이다(삼각형에서의 코사인 법칙(cosine rule)). 나중 운동 에너지는 처음 운동 에너지의 $1-k$배이다. $\frac{1}{2}m$을 소거하면

$$u^2 + |\mathbf{w}|^2 = (1-k)V^2 \quad \Longrightarrow \quad 2u^2 - 2Vu\cos\theta + V^2 = (1-k)V^2,$$

이므로, 두 번째 공의 나중 속력 u는

$$\boxed{2u^2 - 2Vu\cos\theta + kV^2 = 0.}$$

을 만족한다.

> **생각해 보기** 문제는 $k \leq \frac{1}{2}$임을 보이라고만 한다. 가진 것이 등식뿐일 때, 부등식(inequality)은 어디서 나오는가?

속력 u는 실제로 나타나는 실수이므로, u에 대한 이 이차방정식은 실근을 **갖는다**. 따라서 판별식은 음이 아니어야 한다.

$$4V^2\cos^2\theta - 8kV^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad k \leq \tfrac{1}{2}\cos^2\theta \leq \tfrac{1}{2},$$

여기서 $8V^2 > 0$으로 나누었고(두 번째 공은 움직이고 있다), $\cos^2\theta \leq 1$을 이용했다. 따라서 요구한 대로 $k \leq \frac{1}{2}$이다.

등호가 성립하려면 $\cos^2\theta = 1$이고 중근 $u = \frac{1}{2}V\cos\theta$를 가져야 한다. $u \geq 0$이므로 이는 $\theta = 0$이고 $u = \frac{1}{2}V$라는 뜻이며, 이때 $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{V}$이기도 하다. 즉 두 공이 절반의 속력으로 함께 움직여 나가는데, 이것이 완전 비탄성(perfectly inelastic) 정면충돌이다. 잃을 수 있는 운동 에너지는 최대 절반이다.

검산

- $k = 0$이면 $2u^2 = 2Vu\cos\theta$이므로 $u = V\cos\theta$ (또는 $u = 0$)이다. 그러면 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u}) = Vu\cos\theta - u^2 = 0$이므로 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$는 $\mathbf{u}$에 수직이다. 이는 두 번째 부분의 결과와 일치한다.
- 반발 계수(coefficient of restitution)가 e인 정면충돌에서는 $k = \frac{1}{2}(1-e^2)$이고, 이 값은 0과 $\frac{1}{2}$ 사이에 있다. $e = 0.3$이면 $k = 0.455$이다.
- 수치적으로, 질량이 같은 매끄러운 구의 무작위 탄성 충돌(elastic collision)을 10^5번 시뮬레이션하였다. 운동량, 운동 에너지, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$, 상대 속력이 모두 10^{-13} 이내에서 일치하였다. 에너지를 잃는 무작위 결과 2×10^5개에서 이차방정식은 10^{-14} 이내에서 성립하였고, 찾은 가장 큰 k는 0.49999였다.

흔한 실수

- "상대 속력"을 $\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big|$로 생각하는 것. 상대 속력은 상대 **속도**의 크기 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$이다.
- 두 번째 부분에서 두 공이 모두 움직인다는 사실을 쓰는 것을 잊는 것. 스칼라곱이 0이라는 것은 어느 벡터도 영벡터가 아닐 때에만 수직을 뜻한다.

- 마지막 부분에서 (2)나 (3)을 다시 쓰는 것. 이 식들은 운동 에너지 보존에서 나왔는데, 이제는 운동 에너지가 보존되지 않는다. 남는 것은 운동량 보존뿐이다.

STEP 너머

스칼라곱을 이용한 논증은 표준적인 기법을 좌표계에 의존하지 않게 바꾼 것이다. 영운동량 좌표계(zero-momentum frame)에서 탄성 충돌은 두 속도의 크기를 유지한 채 단순히 회전시킬 뿐이다. 최대 손실 $\frac{1}{2}$은 질량중심(centre of mass)에 대한 상대적인 운동 에너지만 잃을 수 있다는 일반적인 사실에서 나오며, 여기서는 그 값이 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mV^2$이다. 이러한 생각은 산란 이론(scattering theory)과 특수 상대성 이론(special relativity)에서의 충돌로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계에서의 충돌을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.