풀이

STEP III 1998, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q1

핵심 아이디어

모든 것을 $\cos x$로 나타낸다. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 쓰면 함수 f는 $\cos x$에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면 f의 치역(range)을 한눈에 알 수 있고, 바로 이 치역이 마지막 소문항을 좌우한다. g에 대해서는 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면, 도함수(derivative)가 $\mathrm{f}'(x)$의 상수배를 어떤 식의 제곱으로 나눈 꼴이 된다.

풀이

$y = \mathrm{f}(x)$의 그래프 그리기

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용하면

$$\mathrm{f}(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

$0 \le 1 - \cos x \le 2$이므로 $-1 \le \mathrm{f}(x) \le 3$이다. 값 3은 $\cos x = 1$일 때, 값 -1은 $\cos x = -1$일 때 얻어진다.

미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

이 값은 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 1$일 때 0이 되며, 이는 $[0, 2\pi]$에서 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$를 뜻한다. 정류점(stationary point)은

$$(0,\,3), \qquad (\pi,\,-1), \qquad (2\pi,\,3).$$

$(0, \pi)$에서는 $\sin x > 0$이고 $\cos x - 1 < 0$이므로 $\mathrm{f}' < 0$이고 f는 감소한다. $(\pi, 2\pi)$에서는

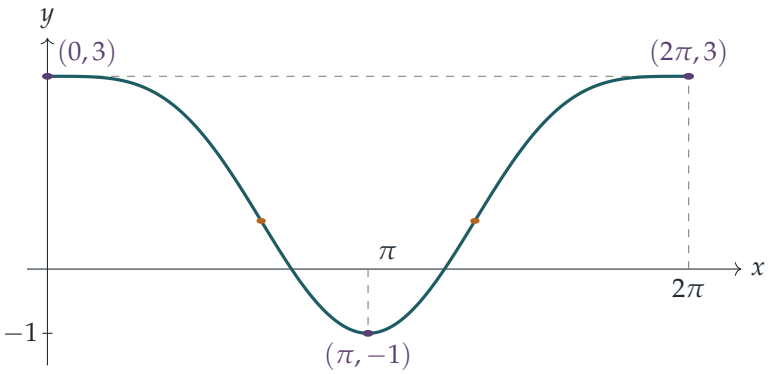
$\sin x < 0$이고 $\cos x - 1$은 여전히 음수이므로 $\mathrm{f}' > 0$이고 f는 증가한다. 따라서 $(\pi, -1)$은 극소(minimum)이고, 양 끝점 $(0,3)$과 $(2\pi, 3)$은 극대(maximum)이다.

> **생각해 보기** $x = 0$ 근처에서 곡선은 어떤 모양인가? 포물선과 비슷한가?

그렇지 않다. 포물선보다 더 평평하다. $x = 0$ 근처에서 $1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$이므로 $\mathrm{f}(x) \approx 3 - \frac{1}{4}x^4$이다. 곡선은 꼭대기에서 매우 평평하며, 이는 $\mathrm{f}''(0) = 0$과 일치한다. $x = \pi$ 근처에서는 $x = \pi + t$로 놓는다. 그러면 $1 - \cos x = 1 + \cos t \approx 2 - \frac{1}{2}t^2$이므로 $\mathrm{f} \approx -1 + 2t^2$이다. 즉 보통의 포물선 모양 극소이다.

그래프를 그리는 데 쓸모 있는 다른 특징은 다음과 같다.

- $\cos(2\pi - x) = \cos x$이므로 곡선은 $x = \pi$에 대하여 대칭이다.
- 곡선은 $(1 - \cos x)^2 = 3$, 즉 $\cos x = 1 - \sqrt{3}$인 곳에서 x축과 만난다. 이로부터 $x = \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 2.39$와 $x = 2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 3.89$를 얻는다.
- $\mathrm{f}''(x) = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$이다. 이 값은 $\cos x = -\frac{1}{2}$인 곳에서 부호가 바뀌므로 변곡점(point of inflection)은 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$와 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$이다.



호박색 점은 변곡점이다.

g의 정류점

몫의 미분법에 의해 $c\,\mathrm{f}(x) + d \neq 0$인 모든 곳에서

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{a\mathrm{f}'(x)\big(c\mathrm{f}(x) + d\big) - c\mathrm{f}'(x)\big(a\mathrm{f}(x) + b\big)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2} = \frac{(ad - bc)\,\mathrm{f}'(x)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2}.$$

$ad \neq bc$이므로, g가 정의되는 모든 점에서 $\mathrm{g}'(x) = 0$인 것은 정확히 $\mathrm{f}'(x) = 0$일 때이다. 따라서 g는 f의 정류점 이외의 정류점을 갖지 않는다.

여전히 g가 $x = 0, \pi, 2\pi$에서 정의되어야 하는데, 나머지 두 조건이 바로 여기서 쓰인다. $x = 0$과 $x = 2\pi$에서 분모는 $3c + d$이고, $d \neq -3c$이므로 0이 아니다. $x = \pi$에서 분모는 $d - c$이고, $d \neq c$이므로 0이 아니다. 따라서 $y = \mathrm{g}(x)$의 정류점은 요구한 대로 정확히 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$에 있으며,

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(2\pi) = \frac{3a+b}{3c+d}, \qquad \mathrm{g}(\pi) = \frac{b-a}{d-c}.$$

$|\mathrm{g}|$가 유계일 때

$d/c < -3$ 또는 $d/c > 1$이라 하자. 특히 $c \neq 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c\,\mathrm{f}(x) + d = c\left(\mathrm{f}(x) + \frac{d}{c}\right).$$

$\mathrm{f}(x)$는 $[-1, 3]$의 값을 가지므로 괄호 안의 값은 $\left[\frac{d}{c} - 1,\ \frac{d}{c} + 3\right]$에 속한다.

- $d/c > 1$이면 괄호 안의 값은 적어도 $\frac{d}{c} - 1 > 0$이다.
- $d/c < -3$이면 괄호 안의 값은 많아야 $\frac{d}{c} + 3 < 0$이다.

어느 경우든 모든 x에 대하여 $\left|c\,\mathrm{f}(x) + d\right| \geq |c|\,k$를 만족하는 상수 $k > 0$이 존재한다. 말로 하면, 분모가 0에서 멀리 떨어져 있다. 분자는 $|a\mathrm{f}(x) + b| \leq 3|a| + |b|$이므로 유계(bounded)이다. 따라서 $[0, 2\pi]$의 모든 x에 대하여

$$|\mathrm{g}(x)| \leq \frac{3|a| + |b|}{|c|\,k}$$

이므로 $|\mathrm{g}(x)|$는 한없이 커질 수 없다.

> **생각해 보기** $-3 < d/c < 1$이면 무엇이 잘못되는가?

그러면 $-d/c$는 -1과 3 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓인다. f는 연속(continuous)이고 $[-1, 3]$의 모든 값을 가지므로 $\mathrm{f}(x) = -d/c$인 x가 존재하고, 그 점에서 분모가 0이 된다. 분자는 같은 점에서 0이 되지 않는다. 만약 둘 다 0이 된다면 $a(-d/c) + b = 0$, 즉 $ad = bc$가 되기 때문이다. 따라서 g는 수직 점근선(vertical asymptote)을 가지며 $|\mathrm{g}|$는 유계가 아니다. 이로써 마지막 소문항의 조건이 꼭 들어맞는 조건임을 알 수 있다.

검산

- 수치적으로, $[0, 2\pi]$의 촘촘한 격자에서 f의 최솟값은 -1, 최댓값은 3이다. 또한 $3 - \mathrm{f}(0.1) \approx 2.496 \times 10^{-5}$이고, 이는 $\frac{1}{4}(0.1)^4 = 2.5 \times 10^{-5}$와 비슷하므로 $x = 0$에서 사차식처럼 평평하다는 것이 확인된다.
- 특수한 경우: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$이면 $\mathrm{g} = \mathrm{f}$이고, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $\mathrm{g}(0) = 3$과 $\mathrm{g}(\pi) = -1$을 준다.

- 임의의 a, b, c, d에 대하여, g의 유한 차분(finite difference) 도함수는 $(ad - bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f} + d)^2$와 일치한다.

흔한 실수

- 양 끝점 $x = 0$과 $x = 2\pi$를 정류점으로 보지 못하는 것. 그곳에서 f′은 실제로 0이다.
- g가 f의 정류점에서 정의되는지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $d \neq -3c$와 $d \neq c$는 바로 이것을 위한 것이다.
- $x = 0$에서 꼭대기를 뾰족한 포물선 모양으로 그리는 것. 곡선은 그곳에서 훨씬 더 평평하다.

STEP 너머

$ad \neq bc$인 사상 $t \mapsto \dfrac{at + b}{ct + d}$를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이 사상은 가역(invertible)이고 도함수 $(ad - bc)/(ct + d)^2$는 결코 0이 되지 않는다. 그래서 이 사상과 합성(composition)해도 정류점이 새로 생기거나 사라지지 않는다. 뫼비우스 사상은 복소해석학(complex analysis)과 기하학에서 핵심적인 역할을 하며, 합성에 대하여 군(group)을 이룬다. 그림을 중심으로 한 아름다운 설명은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.