풀이

STEP II 1998, 문제 9

역학 • 골조의 정역학

> **STEP II 1998, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q9

핵심 아이디어

골조(framework)는 가벼우므로 골조에 작용하는 외력은 두 개뿐이다. A에서의 지지력과 C에서의 무게이다. 평형(equilibrium)을 이루는 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 작용선 위에 있어야 한다. 이것으로 지지력과 육각형이 매달리는 모양이 모두 정해진다. 그다음은 절점법(method of joints)이다. 막대 두 개만 만나는 절점에서 시작해 힘을 분해하고, 미지의 힘이 많아야 두 개인 절점으로 옮겨 가며 육각형을 한 절점씩 돌아간다.

풀이

지지력

육각형의 변과 세 대각선 막대를 여섯 꼭짓점에서 매끄럽게 핀으로 연결된 가벼운 막대로 모형화하고, $1\,\mathrm{kg}$ 질량의 무게를 W라 하자. 그러면 $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$이다. 막대가 가벼우므로 골조 전체에 작용하는 외력은 A의 지지대가 주는 힘 $\mathbf{R}$와 C에서 연직 아래로 작용하는 무게 W뿐이다.

> ? **생각해 보기** 골조를 원하는 아무 각도로나 매달 수 있을까?

그렇지 않다. 골조 전체에 대해 힘의 합은 0이어야 하고 모멘트(moment)의 합도 0이어야 한다. A에 대한 모멘트를 취하면 지지력의 모멘트는 0이므로, C에서의 무게도 A에 대한 모멘트가 0이어야 한다. 이는 C가 A의 바로 아래에 있을 때만 가능하다. 따라서 골조는 짧은 대각선 AC가 연직이 되도록 매달리고, 힘을 분해하면

$$\mathbf{R} = W \text{ 연직 위 방향}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

이다. 이는 CA를 따라 작용하는 $1\,\mathrm{kg}$의 무게와 같다.

막대에 걸리는 힘

한 변의 길이를 1로 둔다(힘은 이 길이에 의존하지 않는다). AC가 연직이면 B는 AC의 중간 높이에서 그 한쪽에 놓이고, 육각형의 나머지 부분은 반대쪽에 놓인다. F는 A와 같은 높이, E는 B와 같은 높이, D는 C와 같은 높이에 있다. 따라서 AF, BE, CD는 수평이고, 변 AB, BC, DE, EF는 수평과 60°를 이루며, 짧은 대각선 BD, BF는 수평과 30°를 이룬다.

막대 XY의 장력(tension)을 T_{XY}라 하자. 장력은 막대의 양 끝에서 절점을 다른 쪽 끝으로 당긴다. 장력이 음수이면 그 막대가 압축력(thrust)을 받는다는 뜻이다.

생각해 보기 미지의 막대 힘이 아홉 개다. 어디서 시작할까?

막대 두 개만 만나는 절점에서 시작한다. 그러면 두 방정식(수평 방향과 연직 방향)을 곧바로 풀 수 있기 때문이다. 절점 C에는 CB와 CD만 있고, 하중도 이 절점에 걸린다.

절점 C. 막대 CB는 수평보다 60° 위를 향하고, CD는 B 쪽에서 멀어지는 수평 방향이다. 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T_{BC}\sin 60^\circ = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \tfrac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{수평 방향:} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60^\circ = \tfrac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

절점 D. 이제 미지수는 DE와 DB뿐이다. D에서 보면 막대 DC는 B 쪽을 향해 수평이고, DE는 B 쪽에서 멀어지며 수평보다 60° 위를 향하고, DB는 B 쪽을 향해 수평보다 30° 위를 향한다. 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T_{DE}\sin 60^\circ + T_{BD}\sin 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{수평 방향:} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60^\circ + T_{BD}\cos 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

따라서 $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$이고 $T_{BD} = -\frac{W}{2}$이다.

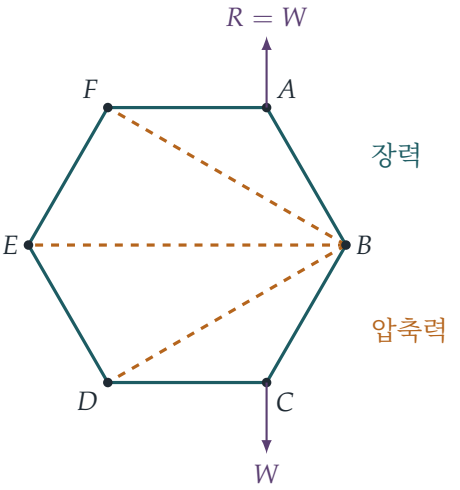
절점 E. 막대 ED는 수평보다 60° 아래를, EF는 수평보다 60° 위를 향하고, EB는 수평이며, 모두 B 쪽을 향한다. 연직 방향으로 분해하면 $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$이다. 수평 방향으로 분해하면

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\tfrac{W}{2\sqrt{3}}.$$

절점 F. 이 절점은 직선 BE에 대해 절점 D의 거울상이다. 연직 방향으로 분해하면 $T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$이고, 수평 방향으로 분해하면 $T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$이다.

절점 A. 수평 방향으로 $T_{AB}\cos 60^\circ = T_{FA}$이므로 $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$이다. 연직 방향으로 $R = T_{AB}\sin 60^\circ = W$이고, 이는 첫 번째 부분의 결과와 일치한다.

절점 B에서 방정식이 두 개 더 나오지만, 이들은 저절로 성립한다. 골조 전체가 이미 평형 상태이기 때문이다. 이 방정식들을 확인해 보는 것은 계산을 점검하는 좋은 방법이다.



$W = g$로 두고 정리하면 다음과 같다.

- 여섯 변 모두 장력을 받는다. AB와 BC에는 $\frac{2W}{\sqrt{3}}$, CD와 FA에는 $\frac{W}{\sqrt{3}}$, DE와 EF에는 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$가 걸린다.
- 안쪽 막대 세 개 모두 압축력을 받는다. BD와 BF에는 $\frac{W}{2}$, BE에는 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$가 걸린다.

따라서 BE에 걸리는 힘은 압축력이고, 그 크기는 다음과 같다.

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}g}{6} \approx 2.83\,\mathrm{N}.$$

검산

- 대칭성: 직선 BE에 대해 반사하면 $A \leftrightarrow C$, $F \leftrightarrow D$가 서로 바뀌고, A에서 위로 향하는 힘 W는 C에서 아래로 향하는 힘 W가 된다. 따라서 하중이 대칭이므로 답도 대칭이어야 한다. 즉 $T_{AB} = T_{BC}$, $T_{FA} = T_{CD}$, $T_{EF} = T_{DE}$, $T_{BF} = T_{BD}$이어야 하고, 실제로 그렇다.
- 절점 B: 수평 방향으로 두 변은 한쪽으로 $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$를 주고, BD, BF, BE는 반대쪽으로 $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$를 준다. 연직 방향으로는 AB와 BC가 상쇄되고, BD와 BF도 상쇄된다.
- $g = 9.8$로 두고 열두 개의 절점 방정식을 모두 수치적으로 풀었다. 방정식들은 모순 없이 위쪽으로 $R = 9.8\,\mathrm{N}$, 압축력 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\mathrm{N}$을 주며, AC가 기울어져 있으면 해가 없다.

흔한 실수

- 육각형을 한 변이나 긴 대각선이 연직이 되도록 그리는 것. 매달린 위치는 정해져 있다. C가 A 아래에 있어야 한다.
- 절점마다 부호 규약을 다르게 쓰는 것. "장력은 절점을 막대의 다른 쪽 끝으로 당긴다"를 한 번 정해 두고, 음수로 나온 답을 보고 어떤 막대가 압축력을 받는지 판단한다.

STEP 너머

절점이 j개인 골조는 막대가 정확히 $2j - 3$개일 때 강성(rigid)을 가지며 정정(statically determinate) 구조이다. 여기서는 $2 \cdot 6 - 3 = 9$이고, 이 때문에 정역학만으로 힘을 구할 수 있다. 막대가 더 많으면 구조는 "부정정(redundant)"이 되어 막대의 탄성까지 고려해야 한다. 이것이 구조역학의 출발점이며, 그래프의 강성에 관한 수학의 출발점이기도 하다. 그 바탕이 되는 벡터 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.