풀이

STEP II 1998, 문제 8

순수수학 • 벡터 기하

> **STEP II 1998, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

핵심 아이디어

여기서 하는 일은 모두 각 직선을 "점 + 매개변수(parameter) × 방향"의 꼴로 쓴 다음 매개변수를 영리하게 고르는 것이다. 식들은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭(symmetric)이므로, 어떤 매개변수 값이 세 벡터에 대하여 대칭인 결과를 준다면 같은 점이 세 직선 위에 모두 놓인다. "관찰을 통해(by inspection)"라는 표현이 찾아보라고 권하는 것이 바로 이것이다.

풀이

중선들은 R에서 만난다

BC의 중점(mid-point)의 위치벡터(position vector)는 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, A에서 이 점까지 가는 직선은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

결과가 대칭이 되도록 세 계수가 같기를 원한다. $1-s = \frac{s}{2}$에서 $s = \frac{2}{3}$이고, 이때 점은

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

이다. B와 C에서 나오는 직선은 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 순환적으로(cyclically) 바꾸어 얻을 수 있고, 같은 선택 $s = \frac{2}{3}$은 각 직선 위에서 같은 대칭인 점을 준다. 따라서 세 직선은 모두 위치벡터가

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

인 점 R, 즉 삼각형의 무게중심(centroid)을 지난다. (A, B, C가 실제로 삼각형을 이루므로 이 직선들 중 어느 두 개도 일치하지 않고, 따라서 R은 이들의 유일한 공통점이다.)

세 평행선은 Q에서 만난다

P의 위치벡터를 $\mathbf{p}$라 하자. 세 직선은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{중점을 지나는 변}BC\text{, 평행한 직선}PA: && \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{중점을 지나는 변}CA\text{, 평행한 직선}PB: && \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{중점을 지나는 변}AB\text{, 평행한 직선}PC: && \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

생각해 보기 λ가 어떤 값일 때 첫 번째 식이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭이 되는가?

첫 번째 직선에서 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$의 계수는 각각 $\frac{1}{2}$이고 $\mathbf{a}$의 계수는 λ이다. 이들을 맞추려면 $\lambda = \frac{1}{2}$이어야 한다. 그러면

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

이다. 나머지 두 직선에서 $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$로 두면 정확히 같은 벡터를 얻는다. 그러므로 세 직선은 모두

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

인 점 Q를 지난다.

PQ는 평면 ABC와 R에서 만난다

먼저 $Q \neq P$이다. 만약 $\mathbf{q} = \mathbf{p}$이면 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$이므로 $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$이고, P는 평면 ABC 위에 있는 점 R이 되어 버린다. 따라서 PQ는 실제로 직선이며, 그 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

$\mathbf{p}$ 항을 없애려면 $1 - \frac{3}{2}t = 0$, 즉 $t = \frac{2}{3}$이어야 하고, 그러면

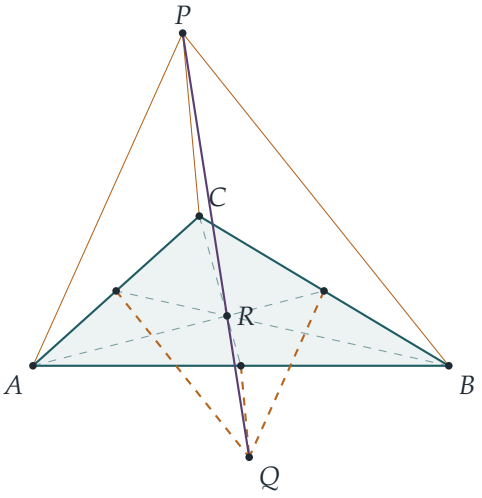
$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

이다. 따라서 R은 직선 PQ 위에 있다. 또한 R은 평면 ABC 위에도 있다(A에서 나오는 중선(median) 위에 있고, 이 중선은 그 평면 안에 있다).

생각해 보기 PQ가 평면과 다른 곳에서도 만날 수 있는가?

그럴 수 없다. 직선은 평면과 만나지 않거나, 정확히 한 점에서 만나거나, 평면 안에 완전히 놓인다. 직선 PQ는 평면 ABC 안에 놓이지 않는다. P가 그 직선 위에 있고 P는 평면 위에 있지 않기 때문이다. 따라서 이 직선은 평면과 많아야 한 점에서 만나며, 그 점이 R이다. 이로써 PQ가 평면 ABC와 R에서 만남이 증명된다.

덤으로, $t = \frac{2}{3}$은 R이 PQ를 $PR : RQ = 2 : 1$의 비로 나눈다는 것을 알려 준다. 이는 $\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$와 같은 말이다.



검산

- 주장한 각 교점은 다시 대입하여 확인할 수 있다. 예를 들어 $\mathbf{q} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{p})$이고, 이는 눈에 보이게 PA에 평행하다.
- $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,3,0)$, $P = (0,0,3)$으로 두면 $R = (1,1,0)$, $Q = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$를 얻는다. P에서 Q까지 3분의 2만큼 간 점은 $(1,1,0) = R$이고, 이는 평면 $z = 0$ 위에 있다.
- 또한 A, B, C, P를 무작위로 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 모든 결과를 확인하였다. 직선 PQ는 언제나 매개변수 $t = \frac{2}{3}$에서 평면 ABC와 R에서 만났다.

흔한 실수

- 방정식을 풀어 두 직선 위에 있는 점을 찾고, 그 점이 세 번째 직선 위에도 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- R이 PQ 위에 있음을 보이고도, 왜 그 점이 PQ가 평면과 만나는 **유일한** 점인지 설명하지 않는 것. P가 평면 위에 있지 않다는 조건은 바로 여기서 쓰인다.

STEP 너머

이 결과 뒤에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다. 중심이 R이고 배율(scale factor)이 $-\frac{1}{2}$인 확대(enlargement), 즉 사상 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r}_R - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_R)$는 A, B, C를 각각 BC, CA, AB의 중점으로 보내고, 모든 직선을 그와 평행한 직선으로 보낸다. 따라서 이 사상은 P에서 만나는 직선

PA, PB, PC를 새로운 세 직선으로 옮기며, 그러므로 새로운 세 직선은 P의 상에서 만나야 한다. 그 상이 바로 Q이고, 확대의 중심은 모든 점과 그 상과 한 직선 위에 있으므로 P, R, Q는 한 직선 위에 있다(collinear). 기하를 변환(아핀 사상(affine map)과 그 고정점(fixed point))을 통해 생각하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 아이디어이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 아이디어가 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.