풀이

STEP II 1998, 문제 7

순수수학 • 도함수를 이용한 부등식

STEP II 1998, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q7

핵심 아이디어

각 부등식은 모두 같은 방법으로 증명한다. 함수가 $x = 0$에서 0이고 그 도함수(derivative)가 양수이므로, 함수는 0에서 출발하여 증가한다. 흥미로운 점은 함수들이 사슬처럼 연결되어 있다는 것이다. g의 도함수에는 f가 나타나고, h의 도함수는 g에 $2x$를 대입한 것이 된다. 따라서 각 소문항이 다음 소문항에 필요한 양의 도함수를 제공한다. 소문항 (iv)에서는 로그(logarithm)를 취하면 몫 F가 합으로 바뀌고, F'/F의 부호는 소문항 (iii)에서 다룬 식의 부호로 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 사용하는 도구는 다음과 같다. ϕ가 미분가능(differentiable)하고 $\phi(0) = 0$이며 $0 < x < a$에서 $\phi'(x) > 0$이면, ϕ는 $[0, a)$에서 순증가(strictly increasing)하므로 $0 < x < a$에서 $\phi(x) > \phi(0) = 0$이다. (평균값 정리(mean value theorem)에 의해 어떤 $c \in (0, x)$에 대하여 $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\,\phi'(c)$이고, 이 값은 양수이다.)

소문항 (i)

$\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$이고,

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\tan x$는 정의되고 양수이므로 $\mathrm{f}'(x) > 0$이다. 따라서 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\mathrm{f}(x) > 0$, 즉 이 구간에서 $\tan x > x$이다.

소문항 (ii)

이번에도 $g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$이다. $x \sin x$에 곱의 미분법(product rule)을 적용하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos x > 0$이고, 소문항 (i)에 의해 $f(x) > 0$이다. 따라서 $g'(x) > 0$이고, $g(0) = 0$이므로 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $g(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

다시 한번 $h(0) = 0$이다. 미분하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 이 식을 전에 본 적이 있는가?

이것은 g에서 x를 $2x$로 바꾼 것이다.

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$이면 $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$이므로, 소문항 (ii)에 의해 $g(2x) > 0$이다. 이 때문에 이번에는 범위가 $\frac{1}{2}\pi$가 아니라 $\frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $h'(x) > 0$이고, $h(0) = 0$과 합하면 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $h(x) > 0$이다.

"이를 이용하여(hence)" 부분을 위해 주어진 식을 배각 공식(double angle formula)으로 다시 쓴다. $\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$이고 $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$이므로

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 정확히 $h(x)$이고, 이는 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 양수이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 x, $\sin x$, $\cos x$는 모두 양수이므로 $F(x) > 0$이고, 따라서 로그를 취할 수 있다.

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

생각해 보기 이 식의 부호는 어떻게 알 수 있는가?

이 구간에서 양수인 공통분모 $3x\sin x\cos x$로 통분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x} \\ &= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

소문항 (iii)에 의해 분자 $\mathrm{h}(x)$는 양수이고 분모도 양수이므로 $\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$이다. $\mathrm{F}(x) > 0$이므로 양변에 곱하면 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서 $\mathrm{F}'(x) < 0$이고, 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 특정 값 확인: $\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$, $\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$, $\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$이므로 F는 감소하지만 그 속도는 매우 느리다.
- 0 근처에서 이 부등식들은 매우 빠듯하다. 매클로린 급수(Maclaurin series)로 전개하면 $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$이고, x, x^3 항은 상쇄된다. 그래서 $\mathrm{h} > 0$임을 단순히 "눈으로 보고" 알 수는 없고, 도함수의 사슬이 필요한 것이다. 수치적으로 $\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$이다.
- 네 부등식 모두와 항등식 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$, $\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$, $\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$를 무작위로 고른 20 000개의 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}'(x) \geq 0$만 보이거나, $\mathrm{f}(0) = 0$을 밝히는 것을 잊는 경우. 출발값이 0이라는 것과 도함수가 엄밀히 양수라는 것, 두 사실이 모두 필요하다.
- 소문항 (iii)에서 $2x$가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 소문항 (ii)를 사용하는 경우. 바로 여기에서 $x < \frac{1}{4}\pi$라는 제한이 생긴다.
- $\mathrm{F} > 0$임을 밝히지 않고 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$에서 $\mathrm{F}' < 0$이라고 결론짓는 경우.

STEP 너머

"출발값이 0이고 도함수가 양수이면 함수는 양수이다"라는 원리는 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나인 평균값 정리의 결과이다. 여기서처럼 이 원리를 반복해서 적용하는 것은 $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$과 같은 부등식을 증명하는 표준적인 방법이며, 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem with remainder)와 밀접하게 관련되어 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 활용을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.