풀이

STEP II 1998, 문제 6

순수수학 • 사이클로이드와 법선

STEP II 1998, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q6

핵심 아이디어

두 곡선은 모두 사이클로이드(cycloid), 즉 굴러가는 원의 둘레 위 한 점이 그리는 자취이다. 이 곡선들에 관한 모든 계산은 반각 공식(half-angle formulae) $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 쓰면 간단해진다. 기울기(gradient)는 $\frac{\theta}{2}$의 탄젠트나 코탄젠트 하나로 정리되고, 법선(normal)의 방정식은 깔끔한 직선의 식 하나로 줄어든다. 어떤 직선이 곡선 (2)의 접선(tangent)임을 보이려면, 그 직선 위에 있으면서 곡선의 기울기가 직선의 기울기와 같은 곡선 (2) 위의 점을 찾으면 된다.

(문제의 두 번째 곡선에는 y_2라고 써야 할 자리에 y_1이라고 적혀 있는데, 이는 오타이다.)

풀이

기울기

곡선 (1)에서 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$이고 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

이다. 이 식은 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$, 즉 $\theta \neq \pi$인 모든 곳에서 성립한다.

곡선 (2)에서 $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$이고 $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

이다. 이 식은 $\theta \neq 0, 2\pi$에서 성립한다.

$\theta = \pi/2$일 때 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$이므로, 곡선 (1)의 기울기는 -1이고 곡선 (2)의 기울기는 1이다.

$\theta = 3\pi/2$일 때 $\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$이고, 여기서 $\tan = -1, \cot = -1$이다. 따라서 곡선 (1)의 기울기는 1이고 곡선 (2)의 기울기는 -1이다.

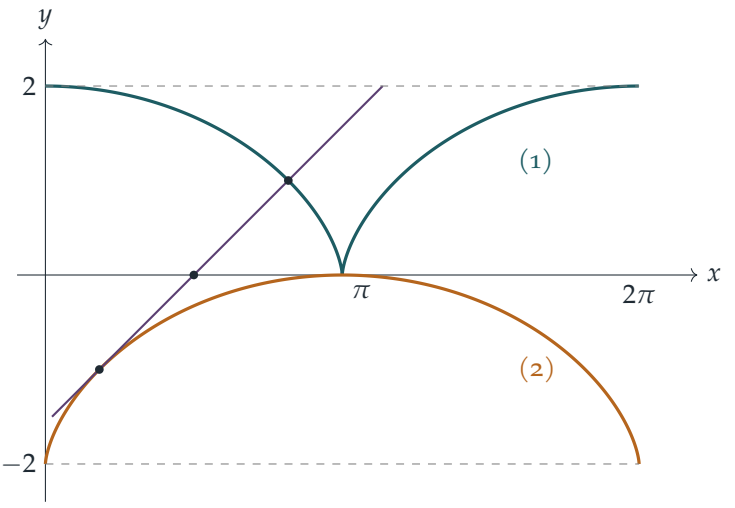
개형 그리기

x_1과 x_2는 모두 θ에 대해 감소하지 않는다(도함수 $1 \pm \cos\theta$가 결코 음수가 아니기 때문이다). 따라서 각 곡선은 $x = 0$에서 $x = 2\pi$까지 왼쪽에서 오른쪽으로 진행한다.

곡선 (1)은 기울기 0으로 $(0, 2)$에서 출발하여 $(\pi, 0)$까지 내려간 뒤, 대칭적으로 $(2\pi, 2)$까지 올라간다. $\theta = \pi$에서는 두 도함수가 모두 0이 되고 $|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$이므로, $(\pi, 0)$에 수직 접선을 갖는 첨점(cusp)이 생긴다. $0 \le y_1 \le 2$이므로 곡선은 $y = 0$과 $y = 2$ 사이에 놓인다.

곡선 (2)는 $(0, -2)$에서 첨점을 가지며($\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$이므로 접선이 수직이다), 기울기가 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$인 $(\pi, 0)$까지 올라갔다가 첨점 $(2\pi, -2)$까지 내려간다. 이는 직선 $y = -2$ 위에 서 있는 보통의 사이클로이드 아치이다.

두 곡선은 $(\pi, 0)$에서 만난다. 곡선 (1)은 이 점에 수직으로 들어오고, 곡선 (2)는 이 점 위를 수평으로 지나간다. $\theta \mapsto 2\pi - \theta$는 두 곡선 모두에서 $x \mapsto 2\pi - x$로 보내고 y는 그대로 두므로, 그림은 $x = \pi$에 대해 대칭이다. 자주색 직선은 $\theta = \pi/2$에서 곡선 (1)의 법선으로, 아래에서 다시 다룬다.



곡선 (1)의 법선

곡선 (1)의 접선의 기울기는 $-\tan\frac{\theta}{2}$이므로, 법선의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$이다($\theta \neq 0, \pi, 2\pi$인 경우이며, 이 값들은 아래에서 따로 다룬다). 점 $(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$에서의 법선은

$$y-(1+\cos\theta)=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}(x-\theta-\sin\theta).$$

이다. 양변에 $\sin\frac{\theta}{2}$를 곱하고 반각 공식을 쓰면

$$y\sin\tfrac{\theta}{2}-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

이다. 양변의 마지막 항은 서로 같아서 소거되고, 법선의 방정식으로

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

이 남는다.

이 꼴은 예외적인 값들도 포함한다. $\theta=0$일 때 이 식은 $x=0$, 즉 $(0,2)$를 지나는 수직선이 되는데, 그 점에서 접선이 수평이므로 옳다. $\theta=2\pi$일 때도 같은 방식으로 $x=2\pi$가 된다. $\theta=\pi$일 때 이 식은 $y=0$, 즉 첨점을 지나는 수평선이 되며, 이는 첨점에서의 수직 접선과 수직이다.

법선이 언제나 x축 위의 점 $(\theta,0)$을 지난다는 점에 주목하자. 이 점은 굴러가는 원이 그 원이 굴러가는 직선과 맞닿는 점이며, 이는 사이클로이드의 고전적인 성질이다.

법선은 곡선 (2)의 접선이다

생각해 보기 법선은 곡선 (2)의 어느 점에서 접해야 할까?

매개변수(parameter) ϕ에서 곡선 (2)의 접선의 기울기는 $\cot\frac{\phi}{2}$이고, 법선의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$이다. $(0,\pi)$에서 cot은 일대일(one-to-one)이므로, $(0,2\pi)$에 속하는 ϕ,θ에 대해 두 기울기는 $\phi=\theta$일 때만 같다. 따라서 가능한 후보는 같은 매개변수 θ를 갖는 곡선 (2) 위의 점뿐이다.

그 점은 $(x_2,y_2)=(\theta-\sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$이다. 이를 법선의 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}\text{좌변}&=y_2\sin\tfrac{\theta}{2}=-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\ \sin\tfrac{\theta}{2},\\ \text{우변}&=(x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}=-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}=-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

이다. 두 값이 같으므로, θ에서 곡선 (1)의 법선은 매개변수가 θ인 곡선 (2) 위의 점을 지난다. 그 점에서 곡선 (2)의 기울기는 $\cot\frac{\theta}{2}$로, 법선의 기울기와 같다. 곡선 위의 한 점을 지나면서 그 점에서의 곡선의 기울기를 갖는 직선은 그 점에서의 접선이므로, 곡선 (1)의 법선은 곡선 (2)의 접선이다. 이로써 증명이 끝난다.

특수한 값에서도 성립한다. $\theta = \pi$일 때 법선 $y = 0$은 곡선 (2)의 꼭대기 $(\pi, 0)$에서 접하며, 그 점에서 곡선 (2)의 기울기는 0이다. $\theta = 0$(또는 2π)일 때 법선 $x = 0$(또는 $x = 2\pi$)은 곡선 (2)의 첨점에서의 수직 접선이다.

검산

- $\theta = \pi/2$에서 법선은 $y = x - \frac{\pi}{2}$이다. 이 직선은 곡선 (1) 위의 점 $(\frac{\pi}{2} + 1, 1)$, 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 그리고 곡선 (2) 위의 점 $(\frac{\pi}{2} - 1, -1)$을 지나며, 이 마지막 점에서 곡선 (2)의 기울기는 첫 부분에서 구한 대로 1이다. 이것이 그림의 자주색 직선이다.
- 유한 차분(finite differences)으로 기울기를 수치적으로 확인한 결과, 소수점 아래 여섯째 자리까지 $-1, 1$과 $1, -1$에 일치했다. 무작위로 고른 θ 값 1000개에서 법선은 두 점을 모두 지났고 곡선 (2)의 접선과 평행했으며, 오차는 10^{-12} 이내였다.

흔한 실수

- 기울기를 $-\sin\theta/(1 + \cos\theta)$ 꼴로 그대로 두고 법선을 구하느라 복잡한 계산을 힘겹게 이어 가는 것. 반각 공식을 쓰면 법선은 두 줄짜리 계산으로 끝난다.
- 법선이 곡선 (2)와 만난다는 것만 보이는 것. 만나는 것만으로는 충분하지 않으며, 만나는 점에서 기울기가 일치한다는 것도 보여야 한다.

STEP 너머

곡선의 곡률 중심(centre of curvature)들이 그리는 곡선을 그 곡선의 **축폐선**(evolute)이라 하며, 이는 곡선의 법선들의 포락선(envelope)이기도 하다. 이 문제는 사이클로이드의 축폐선이 아치의 절반만큼 평행이동한 합동인 사이클로이드임을 보여 준다. 법선을 따라 곡선 (1)에서 곡선 (2)와의 접점까지의 거리는 $4|\cos\frac{\theta}{2}|$인데, 이는 정확히 그 점에서 곡선 (2)의 꼭대기까지의 호의 길이(arc length)와 같다. 따라서 곡선 (1)은 곡선 (2)에서 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 자취이다. 하위헌스(Huygens)는 이를 이용하여 주기(period)가 진폭(amplitude)에 의존하지 않는 진자를 만들었다. 곡률, 축폐선, 신개선(involute)에 대해서는 Pressley, *Elementary Differential Geometry*(기초 미분기하학)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.