풀이

STEP II 1998, 문제 5

순수수학 • 복소수의 삼각부등식

> **STEP II 1998, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q5

핵심 아이디어

$|z_1 - z_2|$는 아르강 도표(Argand diagram)에서 두 점 사이의 거리이므로, $|z_1 + z_2|$에 대한 부등식은 삼각형의 한 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다는 사실을 말할 뿐이다. 이것을 n개의 항으로 확장하고 나면, 마지막 부분은 각 항을 그 절댓값으로 위에서 누르고 등비급수(geometric series)를 알아보는 문제가 된다. $|z|$가 작으면 좌변이 너무 작아서 결코 1에 도달할 수 없다.

풀이

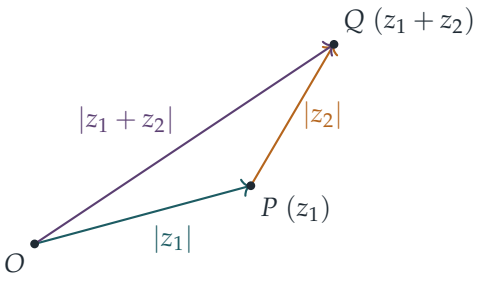
절댓값, 거리, 그리고 삼각부등식

x, y가 실수이고 $z = x + \mathrm{i}y$이면, z의 절댓값(modulus)은

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

즉 원점에서 z를 나타내는 점 (x, y)까지의 거리이다. $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$이면 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$이고, 이는 z_1과 z_2를 나타내는 두 점 사이의 거리이다.

이제 O, P, Q를 각각 0, z_1, $z_1 + z_2$를 나타내는 점이라 하자.



위의 해석에 따라

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1+z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1+z_2|.$$

선분 OQ는 O에서 Q까지 가는 가장 짧은 경로이므로, 경로 $O \to P \to Q$보다 길지 않다. 즉 $OQ \le OP + PQ$이고, 등호는 P가 선분 OQ 위에 있을 때 (점들이 일치하는 퇴화된 경우도 포함하여) 정확히 성립한다. 따라서

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

n개 항에 대한 부등식

모든 $n \ge 1$과 모든 복소수 $z_1, \ldots, z_n$에 대하여

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

이 성립함을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. $n=1$이면 양변이 모두 $|z_1|$이다. 어떤 $n=k\ge 1$에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $z_1, \ldots, z_{k+1}$이 주어졌을 때, 두 복소수 $w = z_1+\cdots+z_k$와 z_{k+1}에 두 항에 대한 부등식을 적용하면

$$\begin{aligned} |z_1+\cdots+z_k+z_{k+1}| = |w+z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

이고, 마지막 단계에서는 귀납 가정(inductive hypothesis)을 사용하였다. 따라서 결과는 $n = k+1$일 때도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 $n \ge 1$에 대하여 성립한다.

마지막 부분

$|z| \le \frac{1}{4}$라 하고 $r = |z|$로 두면 $0 \le r \le \frac{1}{4}$이다. 각 항은 $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$를 만족하므로, n개 항에 대한 부등식에 의해

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n \\ &\le 3(r + r^2 + \cdots + r^n). \end{aligned}$$

생각해 보기 $3(r+r^2+\cdots+r^n)$을 어떻게 1과 비교할 수 있는 꼴로 바꿀 수 있을까? 그리고 부등식이 **엄격한** 부등식이 되도록 하려면 어떻게 해야 할까?

이것은 유한 등비급수이고, $r \le \frac{1}{4} < 1$이므로 합 공식을 쓸 수 있다.

$$3(r+r^2+\cdots+r^n) = \frac{3r(1-r^n)}{1-r}.$$

$r=0$이면 이 값은 0이다. $0 < r \le \frac{1}{4}$이면 $0 < 1-r^n < 1$이므로

$$\frac{3r(1-r^n)}{1-r} < \frac{3r}{1-r} \le \frac{3\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1,$$

이다. 여기서 마지막 단계가 성립하는 것은 $\dfrac{3r}{1-r}$이 $[0,1)$에서 r에 대하여 증가하기 때문이다(분자는 증가하고 양수인 분모는 감소한다). 어느 경우든

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| < 1,$$

이므로 좌변은 1이 될 수 없다. 따라서 이 방정식은 $|z| \le \frac{1}{4}$인 해를 갖지 않는다.

검산

- 이 한계는 최선이다. 모든 $a_k = 3$이고 $z = \frac{1}{4}$이면 좌변은 $3\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) = 1-4^{-n}$이고, 예를 들어 $n=1,2,3$일 때 0.75, 0.9375, 0.984375이다. 이 값은 1에 원하는 만큼 가까워지지만 결코 1에 도달하지는 않으며, 그래서 엄격한 부등식이 중요하다.
- $n \le 15$, $|a_k| \le 3$인 a_k, $|z| \le \frac{1}{4}$인 z를 200 000번 무작위로 골라 시험해 본 결과, $|a_1 z + \cdots + a_n z^n|$의 최댓값은 약 0.996이었고 언제나 1보다 작았다.

흔한 실수

- 무한합 $3r/(1-r) \le 1$만 사용하면 |좌변| ≤ 1밖에 얻지 못하고, 이것으로는 해가 존재할 가능성을 배제할 수 없다. 유한합(또는 $r>0$일 때 $r^n > 0$이라는 사실)이 엄격한 부등식을 보장해 준다.
- 귀납법 단계에서 두 항에 대한 부등식은 $z_1+\cdots+z_k$를 **하나의** 복소수로 보고 적용해야 한다. 그것이 이 단계의 핵심이다.

STEP 너머

삼각부등식(triangle inequality)은 **거리 함수**(metric)를 정의하는 성질이며, $|z_1 - z_2|$는 $\mathbb{C}$를 거리 공간(metric space)으로 만든다. 해석학의 거의 모든 수렴 논증이 이것에 기대고

있다. 마지막 부분은 다항식과 멱급수(power series)의 영점의 위치를 알아내는 결과들의 아주 간단한 형태이다. 여기서 $f(z) = a_1 z + \cdots + a_n z^n - 1$은 원판 $|z| \leq \frac{1}{4}$ 안에 영점이 없으며, 이는 루셰 정리(Rouché's theorem)와 같은 맥락에 있다. 복소수의 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 해석학에서의 거리 개념에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.