풀이

STEP II 1998, 문제 4

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 1998, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q4

핵심 아이디어

골치 아픈 인수 $\operatorname{cosec}(x/2)$는 직접 적분할 수 없지만, 연속한 두 피적분함수(integrand)의 차는 훨씬 다루기 쉽다. 사인의 차 공식을 쓰면 인수 $\sin(x/2)$가 생기고, 이것이 코시컨트를 정확히 상쇄한다. 남는 것은 다항식과 코사인의 곱이고, 이는 전형적인 부분적분(integration by parts)으로 처리된다. 그다음 차들을 망원 합(telescoping sum)으로 더하면 손으로 계산할 수 있는 시작값까지 줄어든다.

풀이

차 $I_n - I_{n-1}$

$nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$이므로 두 피적분함수의 차는

$$\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)[\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x]\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}$$

이다. 합차 공식(factor formula) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$에서 $\frac{A+B}{2} = nx$, $\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$로 두면

$$\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x = 2\cos nx\,\sin\tfrac{x}{2}$$

이다. $\sin\frac{x}{2}$가 코시컨트를 상쇄하므로

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** $\operatorname{cosec}(x/2)$가 무한대가 되는 $x = 0$에서도 이 상쇄가 정당한가?

그렇다. $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{x}{2} \to 2n+1$이므로 원래의 각 피적분함수는 $x \to 0$일 때 유한한 극한(limit)을 가지며, 따라서 이 적분들은 전혀 문제없는 보통의 적분이다. $0 < x \le \pi$에서는 상쇄가 정확한 대수 계산이고, 한 점 $x = 0$에서 피적분함수의 값을 바꾸어도 적분값은 변하지 않는다.

이제 $u = \frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos nx$로 두고 부분적분하면 $v = \frac{1}{n}\sin nx$이다($n \ge 1$이므로 가능하다).

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

여기서 $\sin 0 = \sin n\pi = 0$이므로 경계항은 사라진다. 그러므로

$$I_n - I_{n-1} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & n\text{이 홀수}, \\ 0, & n\text{이 짝수}. \end{cases}$$

I_n의 계산

망원 합을 쓰려면 시작값이 필요하다. 이 적분은 I_0도 똑같이 정의한다. $n = 0$이면 피적분함수는 $(\frac{\pi}{2} - x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$이므로

$$I_0 = \int_0^\pi \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^\pi = 0$$

이고, 위의 차 공식은 $n = 1$일 때도 성립한다(계산에서 $n \ge 1$만 사용했다). $1, 2, \ldots, n$에 대한 차를 모두 더하면

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^2}.$$

홀수인 k만 기여하고 각각 $4/k^2$을 주므로

$$\boxed{I_n = 4\sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ 홀수}}}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),}$$

이고, 마지막 항은 n이 홀수이면 $1/n^2$, n이 짝수이면 $1/(n-1)^2$이다. 같은 말로, $m = \lceil n/2 \rceil$일 때 $I_n = 4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$이다.

$n = 0$을 쓰는 것이 마음에 걸린다면(문제에서는 n이 양수라고 했다) 대신 I_1에서 시작하면 된다. $\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2}(1 + 2\cos x)$이므로, 위의 부분적분을 $n = 1$로 적용하면 $I_1 = \int_0^\pi(\frac{\pi}{2} - x)(1 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2\cdot 2 = 4$를 얻는다. 이는 공식과 일치한다.

검산

- $I_1 = I_2 = 4$이고 $I_3 = I_4 = 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \approx 4.4444$이다. 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면($x = 0$에서는 피적분함수의 극한값 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$을 사용) I_3에 대해 $4.444444\ldots$를 얻고, 모든 $n \leq 12$에 대해 합과 10^{-8} 이내로 일치한다.
- n에 대한 피적분함수는 $\frac{\pi}{2} - x$와 $1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos nx$의 곱이며, $\frac{\pi}{2} - x$는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 기함수(odd function)이다. 짝수 k에 대해(그리고 상수 1에 대해서도) $\cos kx$는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 우함수(even function)이므로, 그 곱은 기함수가 되어 $[0, \pi]$에서 적분하면 0이 된다. 이것이 $I_0 = 0$이고 짝수 k가 아무것도 기여하지 않는 이유이다.

흔한 실수

- 사인의 차 공식에서 부호나 인수 2를 틀리는 실수. $x = \pi, n = 1$과 같은 값을 넣어 확인해 보라.
- $(-1)^n$ 대신 $\cos n\pi = 1$로 쓰는 실수. 이렇게 하면 모든 차가 0이 되어 버린다.
- 시작값을 잊거나, 짝수 항이 사라진다는 것을 알아채지 못하고 답을 모든 k에 대한 합으로 쓰는 실수.

STEP 너머

함수 $\sin(n + \frac{1}{2})x / \sin\frac{x}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$는 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel)으로, 푸리에 급수(Fourier series)가 수렴(converge)함을 증명하는 데 핵심이 되는 대상이다. $n \to \infty$일 때 우리의 합은 $\sum_{\text{홀수}k} 1/k^2 = \pi^2/8$을 이용하면 $4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$로 수렴하는데, 이 식은 오일러(Euler)의 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$과 가까운 친척이다(수치적으로 $I_{200} \approx 4.925$이고 $\pi^2/2 \approx 4.935$이다). 푸리에 급수와 이러한 합은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)에, 수렴의 바탕이 되는 해석학은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)에 잘 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.