풀이

STEP II 1998, 문제 3

순수수학 • 망원급수

> **STEP II 1998, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q3

핵심 아이디어

분모에 연속한 인수들의 곱이 있는 일반항은 부분분수(partial fractions)로 분해하라고 손짓하는 셈이다. 그렇게 나눈 조각들은 합 전체에 걸쳐 서로 상쇄되고(망원 소거, telescoping), 양 끝의 몇 항만 남는다. 둘째 부분에서는 비 a_n/a_{n-1}이 주어지므로 a_n/a_1은 비들의 곱이 되고, 이 곱 역시 연쇄적으로 상쇄된다. 운이 좋다면 이것이 a_n을 첫째 부분의 급수로 되돌려 줄 텐데, 실제로 그렇다.

풀이

합 S_N

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

가림법(cover-up rule)을 쓰면, $n=0$에서 $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$이고, $n=-1$에서 $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$이며, $n=-2$에서 $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$이다. 따라서

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

$A+B+C=0$임에 주목하자. 바로 이 사실 때문에 합이 연쇄적으로 상쇄된다.

$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$이라 하자. 그러면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. $A + B + C = 0$이므로 H_N의 계수가 사라진다.

$N \to \infty$일 때 $\frac{1}{N+1}$과 $\frac{5}{N+2}$는 모두 0으로 수렴(converge)하므로

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

수열 a_n

$n \geq 2$에 대하여 주어진 비들을 모두 곱한다.

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

생각해 보기 이 두 곱은 어떻게 간단히 정리되는가?

직접 써 보자. 둘째 곱은 각 분자가 다음 분모와 약분되므로 곧바로 연쇄적으로 상쇄된다.

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n-3} = 2n - 1.$$

첫째 곱에서 분자는 $1, 2, \ldots, n-1$을, 분모는 $4, 5, \ldots, n+2$를 차례로 지난다. 4부터 $n-1$까지는 모두 약분되므로

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

이 계승 꼴은 $n < 5$여서 약분할 것이 없을 때에도 모든 $n \geq 2$에 대해 성립한다. 따라서

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

$n = 1$일 때 우변은 $\frac{6}{6} = 1$이므로, 이 공식은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. 확인해 보면 $n = 2$일 때 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$이고, 이는 주어진 비 $\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 1}$과 일치한다.

$a_1 = \frac{2}{9}$이면

$$a_n = \frac{2}{9} \cdot \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

즉 a_n은 첫째 급수의 제n항의 $\frac{4}{3}$배이다. 그 부분합(partial sum)은 $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

검산

- $N = 1$: 공식은 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{6}$을 주는데, 이는 첫째 항 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$이다. $N = 2$이면 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{4}\right) = \frac{7}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$이다. 둘 다 옳다.
- 수치로 계산하면 처음 1999개 항의 합은 0.74900…이며, 공식이 예측하는 대로($S_N \approx \frac{3}{4} - \frac{2}{N}$) 아래쪽에서 $\frac{3}{4}$에 다가간다.
- $a_1 = \frac{2}{9}$로 두고 점화식(recurrence)으로 a_n을 만들어 보면, 처음 299개 항의 합은 0.9911…이다. 나머지 꼬리는 약 $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300} \approx 0.009$이므로 전체 합이 1이라는 결과와 부합한다.

흔한 실수

- 연쇄 상쇄되는 합의 양 끝을 잘못 처리하는 것. 위에서처럼 H_N을 써서 나타내면 항을 빠짐없이 정확하게 셈할 수 있다.
- 계승의 곱을 한 자리씩 어긋나게 계산하는 것. 약분하기 전에 처음 몇 개와 마지막 몇 개의 인수를 직접 써 보라.
- a_n/a_1에 대한 공식이 곱이 빈 곱이 되는 $n = 1$에서도 성립하는지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

망원 소거는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)의 이산판이다. $\int f' = f(b) - f(a)$인 것과 똑같이 $\sum(f(n+1) - f(n)) = f(N+1) - f(1)$이다. 둘째 부분의 수열은 **초기하**(*hypergeometric*) 수열로, 연속한 두 항의 비가 n의 유리함수(rational function)이다. Gosper 알고리즘은 이러한 합이 닫힌 꼴을 가지는 때가 정확히 언제인지 판정하며, 컴퓨터 대수 시스템은 바로 이 방법으로 급수의 합을 구한다. 부분합의 극한에 대한 해석학적 논의는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.