풀이

STEP II 1998, 문제 2

순수수학 • 이항급수를 이용한 근사

> **STEP II 1998, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q2

핵심 아이디어

이항급수(binomial series)는 변수가 작을 때 빠르게 수렴(converge)하므로, $\sqrt{2}$(또는 $\sqrt[3]{2}$)를 간단한 유리수와 $(1+x)^a$의 곱으로 나타내되 x가 아주 작도록 하고 싶다. 제곱근(square root)의 경우, $49/50$은 1에 아주 가까우면서 2를 인수로 가진다. 세제곱근(cube root)의 경우에는 다른 세제곱수에 $2\times$를 한 것과 거의 같은 세제곱수를 찾는데, $128 = 2\times 4^3$이 $125 = 5^3$ 바로 옆에 있다.

풀이

2의 제곱근

먼저 주어진 식을 $\sqrt{2}$와 연결한다. $1-\frac{1}{50} = \frac{49}{50}$이므로

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$의 이항급수는 다음과 같이 시작하며,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

$|x| < 1$에서 성립한다. $y = \frac{1}{100}$으로 두고 $x = -\frac{2}{100} = -2y$를 대입한다. 그러면 2의 거듭제곱이 깔끔하게 약분된다.

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(2y) - \tfrac{1}{8}(2y)^2 - \tfrac{1}{16}(2y)^3 \\ &= 1 - y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 \\ &= 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 \\ &= 0.9899495.\end{aligned}$$

1/50을 2/100으로 쓰는 것이 도움이 되는 이유가 바로 이것이다. 모든 항이 10의 거듭제곱에 1 또는 $\frac{1}{2}$을 곱한 꼴이 되므로, 계산이 정확한 소수로 이루어진다.

따라서

$$\sqrt{2} \approx \frac{10 \times 0.9899495}{7} = \frac{9.899495}{7} = 1.41421357\ldots,$$

이고, 소수점 아래 여섯째 자리까지 $\sqrt{2} \approx 1.414214$이다. 이것이 구하려던 결과이다.

2의 세제곱근

? **생각해 보기** N과 a는 무엇일까? 무엇이 $(1 + N/125)^a$를 $\sqrt[3]{2}$와 관련짓는가?

$125 = 5^3$이므로 $(125 + N)/125$의 세제곱근은 $\sqrt[3]{125 + N}/5$이다. 그러므로 N이 작으면서 $125 + N$이 완전세제곱수(perfect cube)의 2배가 되기를 바란다. 2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2 \times 4^3 = 2, 16, 54, 128$을 보면 128이 125와 겨우 3만큼 차이 난다. 그래서 $N = 3$, $a = \frac{1}{3}$으로 잡는다.

$$\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{128}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1 + x)^{1/3}$의 이항급수는 다음과 같이 시작한다.

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \cdots.$$

앞에서와 마찬가지로 치환(substitution)을 하면 계산이 깔끔해진다. $y = \frac{1}{125} = 0.008$로 두고 $x = 3y$를 대입하면 $\frac{1}{3}x = y$, $\frac{1}{9}x^2 = y^2$, $\frac{5}{81}x^3 = \frac{5}{3}y^3$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1 + y - y^2 + \tfrac{5}{3}y^3 \\ &= 1 + 0.008 - 0.000064 + \tfrac{5}{3}(0.000000512) \\ &= 1.007936 + 0.00000085333\ldots \\ &= 1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

여기에 $\frac{5}{4}$를 곱하면

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

이므로 소수점 아래 여섯째 자리까지 $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$이다.

검산

계산기로 구하면 $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$, $\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$이므로 두 근삿값 모두 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하다. 우리가 얻은 값은 1.41421357과 1.25992107이다. 두 급수는 컴퓨터로 정확한 분수를 써서 확인하였다. 생략한 첫 항을 보면 오차의 크기를 가늠할 수 있다. $-\frac{5}{128}x^4$는 $\sqrt{2}$의 추정값에 약 -9×10^{-9}만큼 기여하고, $-\frac{10}{243}x^4$는 $\sqrt[3]{2}$의 추정값에 약 -1.7×10^{-8}만큼 기여한다. 둘 다 소수점 아래 여섯째 자리를 바꿀 수 있는 크기인 5×10^{-7}보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- 배율을 되돌리는 것을 잊는 실수. 급수로 얻는 값은 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$과 $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$이지, $\sqrt{2}$와 $\sqrt[3]{2}$ 자체가 아니다.
- 급수에서 부호를 틀리는 실수. 첫 번째 부분에서는 x가 음수이므로 1 다음의 네 항이 모두 음수이다. 두 번째 부분에서는 부호가 번갈아 바뀐다.
- 너무 일찍 반올림하는 실수. 마지막 나눗셈이나 곱셈을 하기 전까지는 적어도 소수점 아래 여덟째 자리까지 유지한다.

STEP 너머

이 문제의 바탕에는 나머지항(remainder term)이 있는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)가 있다. 이 정리는 "다음 항이 아주 작다"는 말을 오차에 대한 엄밀한 한계로 바꾸어 준다. 또한 공비가 약 0.02인 급수가 항 하나마다 대략 소수 한 자리 반에서 두 자리씩 정확도를 얻는 이유를 설명해 준다. 같은 요령, 즉 p^n/q^n이 목표값의 간단한 배수에 가까운 유리수 p/q를 찾는 방법은 정수론(number theory)의 연분수(continued fractions) 및 유리수 근사(rational approximation)와 이어진다. 이에 관해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 읽기 좋은 책이며, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 테일러 정리의 나머지항을 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.