풀이

STEP II 1998, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.11 절 **야수는 어떻게 공을 잡는가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/fielders.html

핵심 아이디어

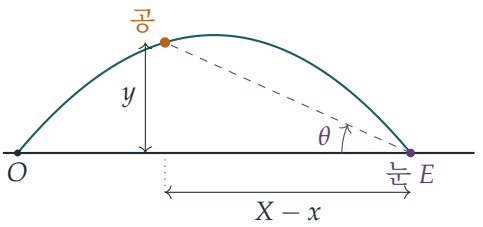
공을 치는 지점을 눈높이에 있는 원점으로 잡고, $\tan\theta$를 "수비수(fielder)의 눈에서 공까지의 수평 거리에 대한 공의 높이"로 나타낸다. 눈높이에서 출발하여 눈높이로 돌아오는 포물체(projectile)의 높이는 $\frac{1}{2}g\,t(T-t)$로 인수분해되며, 여기서 T는 비행 시간(time of flight)이다. 수비수가 결국 올바른 위치에 도달한다면 수평 거리 역시 $T-t$의 상수배가 된다. 따라서 인수 $T-t$가 약분되고, $\tan\theta$는 t에 비례하게 된다.

풀이

공은 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 없다) 움직이는 질점(particle)으로, 수비수의 눈은 공을 친 지점과 같은 높이에 있는 한 점으로 모형화한다. 공을 친 지점 O에서 수비수 쪽으로 수평 방향을 x축, 연직 위쪽을 y축으로 잡는다. 공의 처음 속도의 수평 성분을 $U>0$, 연직 성분을 $W>0$이라 하자. 그러면 시각 t에서

$$x = Ut, \qquad y = Wt - \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}g\,t\,(T-t), \qquad \text{여기서} T = \frac{2W}{g}$$

이고, T는 공이 다시 눈높이로 돌아오는 시각이다.



수비수의 눈의 수평 위치가 X라면(공이 날아가는 동안 $X > x$이다), 시선(line of sight)은 수평면 위로 각 θ만큼 올라가 있으며, 이때

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}.$$

서 있는 수비수

"완벽한 위치에 있다"는 것은 공이 수비수의 눈에 도달한다는 뜻이다. 즉 수비수의 눈은 공이 눈높이로 돌아오는 지점 $X = UT$에 있다. 그러면 $0 < t < T$에 대하여

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

이다. 여기서 공이 날아가는 동안 0이 아닌 $T-t$를 약분하였다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

이고, 이는 요구한 대로 상수이다. (공을 잡기 직전에는 $\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$이다. 즉 수비수는 공이 처음 쳐진 각과 정확히 같은 각으로 날아 들어오는 것을 보게 되며, 이는 포물선의 대칭성에서 예상되는 바이다.)

달리는 수비수

이제 다음 공의 속도 성분을 U, W라 하고(따라서 다시 $T = 2W/g$일 때 $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$이다), 공을 치는 순간 수비수가 O로부터 거리 D인 곳에서 출발하여 타자(batsman) 쪽으로 일정한 속력 v로 달린다고 하자. 수비수의 눈은 $X = D - vt$에 있으므로

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

수비수가 공을 잡는 것은 정확히 시각 T에 공이 눈높이로 돌아오는 지점에 수비수의 눈이 있을 때, 즉

$$D - vT = UT \quad \Longleftrightarrow \quad D = (U+v)T.$$

일 때이다. 이 일이 일어날 필요충분조건이 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$가 상수인 것임을 보이겠다. 그러면 "$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$가 일정하도록 v를 고르라"는 것이 올바른 규칙이 된다.

수비수가 올바른 속력을 골랐다면 $D = (U+v)T$이고, $(*)$는

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}g\,t\,(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2(U+v)},$$

가 되어 상수이다. 이는 첫 번째 부분에서 U를 수비수에 대한 공의 상대 속력 $U+v$로 바꾼 것과 정확히 같다.

> **생각해 보기** 이것은 필요한 것의 절반일 뿐이지 않은가? 다른 v도 일정한 변화율을 줄 수 있지 않을까?

그렇지 않다. 비행하는 동안 내내 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = k$(상수)라고 하자. $t = 0$일 때 공은 눈높이에 있으므로 $\tan\theta = 0$이고, 따라서 $\tan\theta = kt$이다. 이것을 $(*)$에 대입하고 t로 나누면$(0 < t < T$에 대하여)

$$\tfrac{1}{2}g\,(T-t) = k\big(D-(U+v)t\big) \quad \text{모든} t \in (0,T).$$

에 대하여 성립한다. 어떤 구간에서 일치하는 t의 두 일차함수는 계수가 같으므로

$$\tfrac{1}{2}g = k(U+v) \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{1}{2}gT = kD.$$

첫 번째 식에서 $k \neq 0$이고, 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누면 $D = (U+v)T$를 얻는데, 이것이 바로 공을 잡는 조건이다.

따라서 수비수를 공에 데려다주는 속력 $v = D/T - U$가 바로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$를 일정하게 유지하는 속력이다. 실제로는 공이 공중에 있는 동안 $D/T - U$를 계산할 수 없지만, 지켜볼 수는 있다. 공이 시야에서 점점 더 빠르게 올라가는 것처럼 보이면 너무 뒤에 있는 것이므로 더 빨리 달려야 하고, 점점 더 느리게 올라가는 것처럼 보이면 속력을 늦춰야 한다. (수비수는 타자 **쪽으로** 달리므로 공은 수비수의 출발점보다 앞에 떨어지고, $D > UT$이므로 $v > 0$이다.)

검산

- 두 번째 부분에서 $v = 0$으로 두면 첫 번째 부분이 다시 나온다. 즉 $D = UT$이고 변화율은 $g/(2U)$이다.
- 단위: g/U의 단위는 $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}} = \mathrm{s^{-1}}$이며, 이는 단위가 없는 수의 변화율로서 알맞다.
- 수치 예: $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$일 때 공을 45°의 각으로 $20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 치면 $T \approx 2.886\ \mathrm{s}$이고 수평 도달 거리는 40.82 m이다. 그 지점에 서 있는 수비수는 $\tan\theta$가 $g/(2U) \approx 0.346\ \mathrm{s^{-1}}$의 비율로 증가하는 것을 본다. 대신 수비수가 49.47 m 떨어진 곳에서 출발하여 $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$로 달린다면 변화율은 $0.286\ \mathrm{s^{-1}}$이다. 여러 시각에서 $(*)$를 수치적으로 미분해 보면 두 변화율이 모두 일정하고, 잘못된 v에서는 변화율이 변한다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- θ를 수비수의 눈이 아니라 타자로부터 재는 것. $\tan\theta$의 수평 거리는 x가 아니라 $X - x$이다.
- 일정한 변화율이 올바른 v를 강제한다는 것은 보이지 않고, 올바른 v가 일정한 변화율을 준다는 것만 증명하는 것. 이것을 실제로 쓸 수 있는 규칙으로 만드는 것은 바로 역(converse)이다.

STEP 너머

이것은 공 잡기의 심리학에서 나온 "광학 가속도 상쇄(optical acceleration cancellation)" 개념이다. 수비수는 공이 어디에 떨어질지 전혀 예측하지 않고, 공의 상이 일정한 비율로 올라가도록 달리는 것으로 보인다. 이는 되먹임 제어 법칙(feedback control law)의 한 예로, 궤적을 계산하는 대신 관찰되는 양을 일정하게 유지하는 방식이다. 포물체 운동, 상대 속도(relative velocity), 그리고 이러한 사고방식의 출발점에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.