풀이

STEP II 1998, 문제 10

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

> **STEP II 1998, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q10

핵심 아이디어

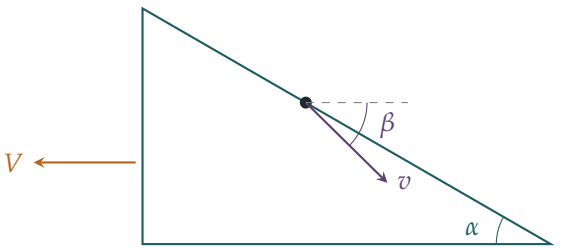
이 문제 전체를 움직이는 사실은 두 가지이다. 입자가 면 위에 계속 머무르므로, **쐐기에 대한** 입자의 속도(상대속도, relative velocity)는 면을 따르는 방향이어야 한다. 그리고 계 밖의 어떤 것도 수평으로 밀지 않고 중력 외에는 아무것도 일을 하지 않으므로, 수평 방향 운동량(momentum)과 에너지(energy)가 모두 보존된다. (i)–(iii)은 각각 이 사실 중 하나를 식으로 쓴 것이다. 이어서 (ii)는 β가 결코 변하지 않음을 보여 주며, 이 덕분에 마지막 부분은 등가속도 운동(motion with constant acceleration)이 된다.

풀이

모형. 입자는 질점(particle)이고, 쐐기는 회전하지 않고 미끄러지는 강체(rigid body)이다. 면과 바닥은 매끄러우며, 입자는 면과 계속 접촉한다. 그림처럼 면이 오른쪽 아래로 기울어져 있다고 하자. 그러면 입자는 오른쪽 아래로 움직이고 쐐기는 왼쪽으로 밀려난다.

수평 성분은 오른쪽을 양, 연직 성분은 위쪽을 양으로 잡으면

$$\text{입자의 속도} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{쐐기의 속도} = (-V,\ 0).$$



소문항 (i)

쐐기에 대한 입자의 상대속도는

$$(v\cos\beta,\ -v\sin\beta) - (-V,\ 0) = (v\cos\beta + V,\ -v\sin\beta).$$

입자가 면 위에 있는 동안 이 상대속도는 면을 따르는 방향, 즉 수평 아래로 각 α인 방향(오른쪽 아래를 향함)이다. 따라서

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

양변을 교차하여 곱하면

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow\quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 이것은 순수한 운동학(kinematics)이다. 역학 원리는 필요 없고, 입자가 면을 떠나지 않는다는 사실만 쓰였다.

소문항 (ii)

원리: 수평 방향 선운동량 보존(conservation of linear momentum). 입자와 쐐기를 하나의 계로 보자. 바닥이 매끄러우므로 이 계에 작용하는 외력은 두 무게와 바닥의 수직항력(normal reaction)뿐이고, 모두 연직 방향이다. (입자와 면 사이의 항력은 내력이다.) 따라서 전체 수평 운동량은 일정하며, 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 처음에 0이다.

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{따라서} \qquad V = \frac{m}{M}v\cos\beta.$$

이것을 (i)에 대입하고 $\sin(\beta-\alpha)$를 전개하면

$$\frac{m}{M}v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

$t > 0$이면 입자가 움직이고 있으므로 $v \neq 0$이다. 또 $\cos\alpha \neq 0$이고 $\cos\beta \neq 0$이다. 만약 β가 90°라면 운동량 식에서 $V = 0$이 되고, 그러면 (i)에서 $\sin(\beta-\alpha) = 0$이 되어 $\beta = \alpha < 90^\circ$이므로 모순이다. $v\cos\alpha\cos\beta$로 나누면

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

생각해 보기 왜 β는 단순히 α와 같지 않을까?

면 자체가 왼쪽으로 물러나고 있기 때문이다. 쐐기에 대해서는 입자가 각 α로 비탈을 내려가지만, 쐐기가 뒤로 물러나므로 지면에 대해서는 입자가 더 가파르게 떨어진다. (ii)의 우변이 상수라는 점에 주목하자. β는 모든 순간에 같으므로 입자는 직선을 따라 움직인다. $M \to \infty$이면 쐐기는 제자리에 머물고, 마땅히 그래야 하듯이 $\beta \to \alpha$이다.

소문항 (iii)

원리: 에너지 보존(conservation of energy). 모든 접촉면이 매끄러우므로 계 전체에 일을 하는 힘은 무게뿐이다. (입자와 면 사이의 수직항력은 각 물체에 따로따로 일을 하지만, 상대속도가 면을 따르는 방향이어서 항력과 수직이므로 두 일의 양은 상쇄된다. 바닥의 항력은 쐐기의 운동 방향과 수직이다.) 쐐기의 질량중심(centre of mass)은 연직으로 움직이지 않으므로 위치에너지의 감소량은 mgy이다. 정지 상태에서 출발하므로

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

(ii)에서 얻은 $V = \dfrac{m}{M}v\cos\beta$를 쓰면

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2\cos^2\beta}{2M}.$$

$2/m$을 곱하면

$$2gy = v^2\left(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\right) = \frac{v^2\left(M + m\cos^2\beta\right)}{M},$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

y에 대한 미분방정식

입자가 내려가는 비율은 입자 속도의 아래쪽 성분이다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

(iii)에 $v = \dot{y}/\sin\beta$를 대입한다($\beta > \alpha > 0$이므로 $\sin\beta \neq 0$임에 유의한다). 그러면 다음 미분방정식(differential equation)을 얻는다.

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,y, \qquad \text{여기서} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

핵심은 (ii)에 의해 β가 상수이므로 k가 **상수**라는 점이다.

이를 풀기 위해 t에 대해 미분하면

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

$t > 0$이면 입자가 내려가고 있으므로 $\dot{y} > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. 그러면 $\ddot{y} = \frac{1}{2}k$이다. 입자의 연직 운동은 다음과 같은 일정한 가속도를 가진다.

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

$t = 0$에서 $y = 0, \dot{y} = 0$(정지 상태에서 출발)이라는 조건으로 두 번 적분하면

$$y = \frac{gMt^2\sin^2\beta}{2\left(M + m\cos^2\beta\right)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

(다른 방법으로, 양의 제곱근 $\dot{y} = \sqrt{ky}$를 택하고 변수분리(separation of variables)를 할 수도 있다. $\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$에서 $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$가 되어 같은 답을 얻는다. 먼저 미분하는 방법을 쓰면 해 $y \equiv 0$을 걱정하지 않아도 된다. 이 해도 $y(0) = 0$과 함께 $\dot{y}^2 = ky$를 만족하지만, 여기서의 운동은 아니다.)

검산

- **고정된 쐐기.** $M \to \infty$라 하자. 그러면 $\beta \to \alpha$이고 $y \to \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha$인데, 이는 옳다. 고정된 매끄러운 비탈에서 비탈 방향의 가속도는 $g\sin\alpha$이고, 그 연직 성분은 $g\sin^2\alpha$이기 때문이다.
- **수치 예.** $M = 2$, $m = 1$, $\alpha = 30°$이면 (ii)에서 $\tan\beta = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin^2\beta = \frac{3}{7}$, $\cos^2\beta = \frac{4}{7}$이고, 공식은 $y = \frac{1}{6}gt^2$를 준다. $g = 9.8$, $t = 1$이면 $y \approx 1.6333$이다. 쐐기와 입자를 단계별로 직접 시뮬레이션한 결과(접촉 조건에서 수직항력을 구하여 뉴턴(Newton)의 법칙을 적용함)도 같은 값을 주었고, 무작위로 고른 2000개의 경우에서 반올림 오차 범위 안에서 (i)–(iii)을 만족하였다.

흔한 실수

- 입자가 수평과 각 α를 이루며 움직인다고 하는 것. 이것은 쐐기에 대해서만 참이다.
- 비탈 방향이나 연직 방향으로 운동량을 보존시키는 것. 바닥의 항력은 연직 방향의 외력이므로 수평 성분만 보존된다.
- 에너지 방정식에서 쐐기의 운동에너지 $\frac{1}{2}MV^2$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

움직이는 면에 구속된 입자는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 고전적인 시험 사례로, 대학 1학년이나 2학년 때 배우게 된다. 라그랑주 역학에서는 두 좌표(예를 들어 쐐기의 위치와, 면을 따라 내려간 입자의 거리)를 고르면 구속력(constraint force)이 방정식에서 완전히 사라지므로, 일정한 가속도들이 몇 줄 만에 나온다. 구속 조건이 있는 뉴턴 역학과 바로 이런 종류의 많은 문제에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.