풀이

STEP II 1998, 문제 1

순수수학 • 디오판토스 방정식과 홀짝성

> **STEP II 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q1

핵심 아이디어

세제곱을 전개하면 대부분의 항이 소거되어, 상수항이 작은 n에 대한 삼차식(cubic)만 남는다. 양변의 홀짝성(parity)을 비교하면 n은 짝수일 수밖에 없다. 그다음 삼차식을 n^2(어떤 수) $= 54$ 꼴로 쓰면 문제는 약수(divisor)에 관한 문제로 바뀐다. $(**)$에 대해서는 짝수 치환(substitution) $n = 2m$을 하면 곧바로 $(*)$로 되돌아간다.

풀이

방정식 $(*)$

$a = n$, $b = 3$으로 놓고 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$을 이용하면

$$(n+3)^3 - (n-3)^3 = 18n^2 + 54,$$

를 얻으므로, $(*)$은 다음과 동치이다.

$$n^3 = 18n^2 + 54, \qquad \text{즉,} \qquad n^2(n-18) = 54. \tag{1}$$

n은 짝수이다. 우변 $18n^2 + 54 = 2(9n^2 + 27)$은 모든 정수 n에 대하여 짝수이다. 만약 n이 홀수라면 n^3도 홀수가 되어 $n^3 = 18n^2 + 54$에 모순이다. 따라서 n은 짝수이다.

n^2은 54를 나눈다. (1)의 두 번째 꼴에서 $n - 18$은 정수이므로, 54는 n^2에 어떤 정수를 곱한 값이다. 따라서 n^2은 54의 약수이다.

> ? **생각해 보기** 이 두 사실을 함께 쓰면 어떻게 모든 정수가 배제되는가?

n이 짝수이므로 $n = 2k$로 쓰자. 그러면 $n^2 = 4k^2$은 4의 배수이다(또한 $n = 0$이면 (1)에서 $0 = 54$가 되므로 $n \neq 0$이다). 그런데 $54 = 2 \times 27$은 4로 나누어떨어지지 않으므로, 0이 아

닌 4의 배수는 어느 것도 54를 나눌 수 없다. 이 모순으로부터 $(*)$을 만족하는 정수 n은 존재하지 않는다.

(다른 방법으로 보면, $54 = 2 \cdot 3^3$을 나누는 제곱수는 1과 9뿐이므로 $n \in \{\pm 1, \pm 3\}$인데, 이들은 모두 홀수이다.)

방정식 $(**)$

이번에는 $b = 6$으로 놓으면

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

이므로, $(**)$은 다음과 동치이다.

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

우변은 모든 정수 n에 대하여 짝수이므로, 앞에서와 똑같이 n^3은 짝수이다. 홀수의 세제곱은 홀수이므로 n은 짝수이다.

> ? **생각해 보기** 왜 첫 번째 부분의 약수 논증을 그대로 가져다 쓸 수 없는가?

$n^2(n-36) = 432$로 쓸 수는 있지만, $432 = 2^4 \cdot 3^3$은 짝수인 제곱 약수$(4, 16, 36, 144)$를 많이 가지므로 나누어떨어짐만으로는 논증이 끝나지 않는다. 대신 짝수라는 사실을 이용한다. m을 정수로 하여 $n = 2m$으로 놓자. 그러면

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

이고, 이것은 정수 m에 대한 방정식 (1)과 정확히 같다. 다시 말해 m은 $(*)$을 만족한다. 실제로 $n = 2m$일 때의 $(**)$은 $n = m$일 때의 $(*)$의 양변에 8을 곱한 것에 불과하다.

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3].$$

$(*)$을 만족하는 정수는 없음을 보였으므로 그러한 m은 존재하지 않는다. 따라서 $(**)$을 만족하는 정수 n은 존재하지 않는다.

검산

- 전개식에 $n = 1$을 대입해 보자: $(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$. ✓
- 삼차식 $n^3 - 18n^2 - 54$는 실근을 정확히 하나 가지며, 그 값은 약 $n \approx 18.164$로 정수가 아니다. ($|n| < 10^5$ 범위에서 컴퓨터로 직접 탐색해도 두 방정식 모두 해가 나오지 않는다.)
- $(**)$의 실근은 $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$으로, 배율 관계 $n = 2m$과 일치한다.

흔한 실수

- $n = 0$인 경우를 따로 언급해야 한다는 것을 잊는 실수: 0은 짝수이지만 0은 54의 약수가 아니다. 여기서는 (1)이 이 경우를 곧바로 배제한다.
- 세제곱을 모두 전개하다가 계산 실수를 하는 것. 항등식(identity) $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$을 쓰면 일이 절반으로 준다.
- $(**)$에서 $n^2 \mid 432$를 보이려 하면 아무 결론도 얻지 못한다. "n은 짝수이다"의 요점은 치환 $n = 2m$에 있다.

STEP 너머

마지막 단계, 즉 $(**)$의 해로부터 같은 꼴이면서 더 작은 수를 가진 방정식의 해가 만들어지는 부분은 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(*method of descent*)의 간단한 형태이다. 이 방법을 반복 적용하면 $x^3 + y^3 = z^3$이 양의 정수해를 갖지 않음을 보일 수 있는데, 이는 오일러(Euler)가 처음 증명한 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 세제곱 경우이다. 여기서는 세 항이 등차수열(arithmetic progression)을 이루므로 훨씬 쉽다. 사실 $(n-3k)^3 + n^3 = (n+3k)^3$은 $t = n/k$가 $t^3 - 18t^2 - 54$의 근이라는 뜻이고, 유리근 정리(rational root theorem)에 의해 이 삼차식은 유리근을 갖지 않으므로, $k \neq 0$인 어떤 경우에도 정수해는 없다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 나누어떨어짐, 홀짝성 논증, 디오판토스 방정식(Diophantine equations)을 다루는 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.