풀이

STEP I 1998, 문제 9

역학 • 진자의 충돌

STEP I 1998, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q9

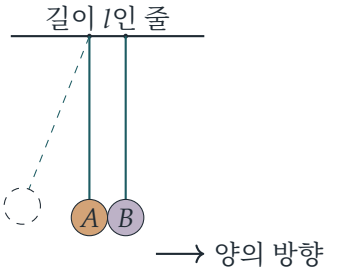
핵심 아이디어

변위가 매우 작으므로 각 구는 단진자(simple pendulum)로서 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 주기 $2\pi\sqrt{l/g}$는 진폭이나 속력에 의존하지 않는다. 두 진자의 길이가 같으므로, 최저점에서 어떤 충돌이 일어나든 그 후 두 구는 반주기 뒤 같은 순간에 속도가 반대로 바뀐 채 최저점으로 돌아온다. 두 번째 충돌이 언제 어디서 일어나는지 알고 나면, 매번 운동량 보존과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 두 줄이면 끝난다.

풀이

모형

A와 B를 같은 길이 l의 가볍고 늘어나지 않는 줄에 매달린 질량 m인 입자로 보고, 공기 저항은 무시하며, 충돌은 순간적이고 충격량(impulse)은 중심을 잇는 수평선 방향으로 작용한다고 가정한다. 첫 번째 충돌에서 A가 움직이는 방향(A에서 B를 향하는 방향)을 양의 방향으로 잡고, $\omega = \sqrt{g/l}$이라 하자.



모든 충돌이 최저점에서 일어나는 이유

진동이 작을 때 각 구는 진폭과 상관없이 각진동수(angular frequency) ω인 단진동을 한다. 따라서 속력 v로 최저점을 떠난 구의 수평 변위는 $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$이고, 시간 π/ω(반주기)가 지나면 속도 $-v$로 움직이며 최저점에 돌아온다. 이는 모든 v에 대해 성립한다.

첫 번째 충돌은 최저점에서 일어난다. B가 그곳에 정지한 채 매달려 있고, A가 속력 u로 그곳에 도달하기 때문이다. 최저점에서 충돌이 일어난 뒤 A와 B의 속도가 $p \le q$라고 하자(충돌 직후 두 구가 서로를 향해 움직일 수는 없다). 최저점을 기준으로 측정하면, 시간 t가 지난 뒤 두 구 사이의 간격은

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

이고, 이는 $0 < t < \pi/\omega$에서 양수이며 $t = \pi/\omega$에서 0이다. 따라서 두 구는 그보다 먼저 만날 수 없고, 둘 다 최저점에 돌아오는 바로 그 순간에 다시 만난다. 이것이 문제의 힌트이다. 두 진자의 주기가 같으므로 둘은 항상 함께 최저점으로 돌아온다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 충돌은 최저점에서 일어나고, 연속된 두 충돌 사이의 시간 간격은 반주기이다.

첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(최저점에서 줄의 장력은 연직 방향이므로 수평 방향 충격량을 주지 않는다)과 뉴턴의 실험 법칙에 의해

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

두 식을 더하고 빼면

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

두 값 모두 ≥ 0이므로 두 구는 모두 B 쪽으로 흔들려 나간다($e = 1$이면 A는 그 자리에 멈추어 최저점에 매달린 채로 있다).

? **생각해 보기** 두 번째 충돌 직전의 속도는 각각 얼마인가?

반주기 뒤 각 구는 속도가 반대로 바뀐 채 최저점에 돌아온다. A의 속도는 $-\frac{1}{2}u(1-e)$이고 B의 속도는 $-\frac{1}{2}u(1+e)$이다. B가 더 빠르므로 B가 뒤에서 A를 따라잡는다. A에 대한 B의 접근 속력은 $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$이다.

두 번째 충돌

두 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 w_A, w_B라 하자. 운동량 보존에 의해

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

이고, 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력은 접근 속력 eu의 e배이다)에 의해

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2 u.$$

두 식을 빼고 더하면

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

따라서 두 번째 충돌 직후 A의 속력은 요구된 대로 $\frac{1}{2}u(1+e^2)$이고 B의 속력은 $\frac{1}{2}u(1-e^2)$이며, 둘 다 A가 처음 놓아졌던 쪽으로 움직인다.

검산

- 완전 탄성 충돌, $e = 1$: A는 결국 속력 u를 갖고 B는 정지한다. 이는 옳다. 첫 번째 충돌 뒤 A는 멈추고 B가 속력 u를 얻으며, B가 속력 u로 돌아와 그것을 모두 A에게 돌려준다.
- $e = 0$: 두 속력 모두 $\frac{1}{2}u$이다. 첫 번째 충돌 뒤 두 구는 사실상 한 덩어리가 되어 속력 $\frac{1}{2}u$로 함께 움직이므로, 이것도 옳다.
- 두 번째 충돌 뒤 운동량은 $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$로, 처음 운동량 mu와 방향이 반대이다.
- $l = 1\,\mathrm{m}$, 처음 각도 0.01 rad인 실제(비선형) 진자 두 개를 시뮬레이션해 보았다. 두 번째 충돌은 첫 번째 충돌로부터 반주기의 1.0001배가 지난 뒤, 최저점에서 3×10^{-6} rad 이내인 곳에서 일어났고, $e = 0.7$일 때 충돌 뒤 속력은 $0.745u$와 $0.255u$로 $\frac{1}{2}(1+e^2)$, $\frac{1}{2}(1-e^2)$와 일치했다.

흔한 실수

- 두 번째 충돌 전에 두 속도가 모두 반대로 바뀐다는 것을 잊고, B가 정지한 A에 부딪힌다고 생각하는 것.
- 두 번째 충돌에서 $e \cdot$(접근 속력) 대신 eu를 쓰는 것. 여기서는 접근 속력이 마침 eu이므로 분리 속력은 e^2u이다.
- 충돌이 최저점에서 일어나는 이유를 "구가 거기에 매달려 있기 때문"이라고 말하는 것. 진짜 이유는 주기가 진폭에 의존하지 않기 때문이며, 그래서 처음에 당기는 각도가 작아야 하는 것이다.

STEP 너머

등시성(isochronism, 주기가 진폭에 의존하지 않는 성질)은 진자에서 근사적으로만 성립한다. 진폭이 커지면 주기가 길어지는데, 그 정확한 값은 타원 적분(elliptic integral)으로 주어지며, 충돌 지점도 최저점에서 점점 벗어나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진자와 충돌을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.