풀이

# STEP I 1998, 문제 8

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP I 1998, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q8

## 핵심 아이디어

유체역학의 옷을 입고 있지만, 이 문제는 순수한 미분방정식(differential equation) 문제이다. 좌변은 도함수의 도함수이므로 두 번 적분하기만 하면 되는데, 그 사이에 $r$로 나누면 상수가 로그로 바뀐다는 점을 기억해야 한다. 그다음 축 위에서 속도가 유한해야 한다는 물리적 조건이 상수 하나를 결정하고, 벽에서의 점착 조건(no-slip condition)이 나머지 상수를 결정한다.

## 풀이

### 일반해

방정식에 $r$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

을 얻는다. $r$에 대하여 한 번 적분하면

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

이고, 여기서 $A$는 상수이다. 이제 $r$로 나눈다(축에서 떨어진 관 내부에서는 $r > 0$이므로 문제없다).

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

다시 적분하면, $r > 0$이므로 $\ln|r|$ 대신 $\ln r$를 써서

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

를 얻으며, $A$와 $B$는 임의의 상수이다. 2계 방정식이므로 상수가 두 개인 것은 예상대로이다.

### 축 근처에서의 거동

$r \to 0^+$일 때 항 $-\frac{1}{4}kr^2$와 $B$는 유계로 남지만(각각 0과 $B$로 수렴한다), $\ln r \to -\infty$이다. 따라서 $A \neq 0$이면 $A\ln r$는 ($A$의 부호에 따라) $-\infty$ 또는 $+\infty$로 발산하고, 그러므로 $|v| \to \infty$이다. 이를 피하는 유일한 방법은 $A = 0$으로 두는 것이며, 이 경우 $v \to B$로 유한하다.

**?** **생각해 보기** 왜 $A = 0$이어야 한다고 고집해야 할까?

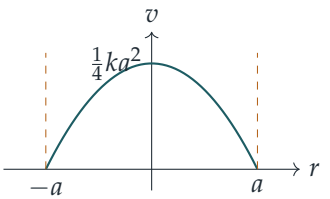
축 $r = 0$은 유체 내부에 있으므로 그곳에서의 속력은 유한해야 한다. 실제 유체는 관의 중심을 따라 무한히 빠르게 흐르지 않는다. $\ln r$ 해는 $r > 0$에서 방정식의 엄연한 해이지만, 여기서는 물리적으로 받아들일 수 없다. (축이 유체의 일부가 아닌, 두 동축 원통 사이의 흐름이라면 이 해도 허용될 것이다.)

### 속도 분포

$A = 0$이면 $v = B - \frac{1}{4}kr^2$이다. $r = a$에서 $v = 0$이라는 조건으로부터 $B = \frac{1}{4}ka^2$이므로

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

이다. 이 분포는 포물선이다. 속력은 축 위에서 최대 $\frac{1}{4}ka^2$이고 벽에서 0으로 줄어든다.




(그림은 지름을 따라 자른 단면을 나타내며, 벽은 점선으로 표시하였다.)

### 유량

주어진 공식에 대입하면

$$F = 2\pi\int_0^a r\cdot\tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2}\int_0^a \left(a^2 r - r^3\right)\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2}\cdot\frac{a^4}{4},$$

이므로

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

이다.

## 검산

- $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$를 다시 대입하면 $r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$이고, 그 도함수는 $-kr$이며, $r$로 나누면 요구한 대로 $-k$가 된다.
- 평균 속력은 $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$로, 최대 속력 $\frac{1}{4}ka^2$의 정확히 절반이다. 이는 포물선 분포의 잘 알려진 성질이다.
- 수치적으로 $k = 2$, $a = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $F \approx 0.785398$로 $\pi/4$와 일치한다.

## 흔한 실수

- 첫 번째 적분에서 상수를 빠뜨리는 것. 그러면 $A \ln r$ 항이 사라져 "unless" 부분이 무의미해진다.
- $-kr$를 적분하여 $-\frac{1}{2}kr^2$를 얻은 다음, 다시 적분하기 전에 $r$로 나누는 것을 잊는 것.
- $F$에 대한 적분 안의 인수 $r$를 빠뜨리는 것. 반지름이 $r$인 얇은 고리를 지나는 유량은 상수가 아니라 그 둘레 $2\pi r$에 비례한다.

## STEP 너머

연산자 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$는 $r$만의 함수에 대한 원통좌표계에서의 라플라시안(Laplacian) $\nabla^2$이다. 따라서 이 문제는 사실 푸아송 방정식(Poisson's equation) $\nabla^2 v = -k$이며, $\ln r$ 해는 점전하의 $1/r$ 퍼텐셜의 2차원 판이다. 결과 $F \propto a^4$는 푸아죄유 법칙(Poiseuille's law)이다. 관의 반지름을 절반으로 줄이면 유량은 16분의 1로 줄어드는데, 좁아진 동맥이 그토록 중요한 문제가 되는 이유가 바로 이것이다. 미분방정식 측면에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.