풀이

STEP I 1998, 문제 7

순수수학 • 등비급수

> **STEP I 1998, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q7

핵심 아이디어

잔액을 해마다 추적하려 하지 말자. 그 대신 각 예금을 따로따로 따라가 본다. £a를 한 번 입금하여 은행에서 k년 동안 이자(interest)를 받으면 £ar^k로 불어나고, 그 합은 등비급수(geometric series)가 된다. 인출에 대해서는 같은 아이디어를 거꾸로 적용한다. 각 인출은 처음 잔액의 일부가 인출될 때까지 이자를 받아 **충당하는** 것이므로, 한 시점에서의 가치를 비교한다.

풀이

거치 기간 후의 금액

ρ%의 이자는 매년 말에 잔액에 $r = 1 + \frac{\rho}{100}$을 곱한다.

예금하는 해에 차례로 $1, 2, \ldots, m$의 번호를 붙이자. k번째 해의 초에 한 예금은 $k, k+1, \ldots, m$번째 해의 말에 이자를 받으므로, 이자를 받는 횟수는 $m - k + 1$이다. 따라서 m번째 해의 말에 그 가치는 ar^{m-k+1}이다. 이를 k에 대해 더하면 m번째 해의 말의 잔액은

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수의 합 공식을 사용하였다($\rho > 0$이므로 $r \neq 1$이다).

그다음 l년 동안에는 입금도 인출도 없으므로, 이 금액에 r이 l번 더 곱해진다. 따라서 이 기간이 끝날 때의 총액은

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m - 1)}{r - 1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 금액을 P라 하자.

인출

첫 번째 인출은 거치 기간 바로 다음 해의 초, 즉 잔액이 P인 시점에 이루어진다. k번째 인출 직후의 잔액을 B_k라 하자. 그러면

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

이다. 인출과 인출 사이에 돈이 1년치 이자를 받기 때문이다. 이 점화식(recurrence relation)을 풀어 쓰면

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

생각해 보기 P에 곱해지는 인수가 왜 r^n이 아니라 r^{n-1}일까?

첫 번째 인출과 n번째 인출 사이에는 연말이 $n-1$번밖에 없으므로, 돈은 이자를 $n-1$번 받는다. 마지막 인출 뒤에 붙는 이자는 계좌가 이미 비어 있으므로 상관이 없다. 마찬가지로, j번째 인출(마지막부터 세어 마지막 인출을 $j = 0$으로 한다)은 n번째 인출 전까지 r^j가 곱해진다.

n번째 인출 후 계좌는 비므로 $B_n = 0$이다. 따라서

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

P를 대입하면

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m - 1)}{r - 1} = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

이고, 그러므로

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

이 등식을 보는 동치인 방법은 "현재 가치(present value)"를 생각하는 것이다. 첫 번째 인출 시점에서 측정하면 k번째 인출의 가치는 b/r^{k-1}이고, 이 가치들의 합은 P와 같아야 한다.

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

검산

- $m = n$이면 답은 $a/b = r^{-(l+n)}$으로 간단해지므로 $b = ar^{l+n}$이다. 이는 타당하다. k번째 예금과 k번째 인출을 짝지어 보자. 둘 사이는 정확히 $m + l = l + n$년 떨어져 있으므로, 각 예금이 정확히 하나의 인출을 충당한다.

- $r \to 1$(이자 없음)일 때 $\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$이므로 $a/b \to n/m$, 즉 $ma = nb$이다. 들어간 돈과 나온 돈이 같다.
- $\rho = 5$, $m = n = 10$, $l = 5$, $a = 1000$일 때, 해마다 계산하는 시뮬레이션을 하면 $P \approx 16855.58$이다. 공식에 따르면 $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$이므로 $b \approx 2078.93$이고, 이 b로 시뮬레이션하면 계좌는 정확히 0으로 끝난다. 또한 컴퓨터로 r, l, m, n을 무작위로 500번 골라 분수로 정확히 계산하여 두 공식을 모두 확인하였다.

흔한 실수

- 첫 번째 합에서 r^{m+1} 대신 r^m을 얻는 실수. 예금은 매년 **초**에 하므로 마지막 예금도 1년치 이자를 받는다.
- $r^{n-1}P$ 대신 r^nP라고 쓰는 실수. n번째 해의 말에 붙는 이자는 계좌가 비워진 뒤에 붙는다.

STEP 너머

이것은 연금(annuity)의 수학이다. 지급액들을 공통의 날짜로 할인하여 비교하는 것(현재가치)은 보험수리학과 금융수학의 기본 원리이다. 점화식 $B_k = rB_{k-1} - b$는 일계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)이다. 그 해는 특정한 상수에 r^k의 상수배를 더한 꼴로, 일계 선형 미분방정식(differential equation)을 푸는 방법과 정확히 닮아 있으며, 이러한 유사성은 대학 1학년의 차분방정식 및 미분방정식 강의에서 다루어진다. 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.