풀이

STEP I 1998, 문제 6

순수수학 • 삼각함수 점화식

> **STEP I 1998, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q6

핵심 아이디어

점화식(recurrence)의 각 단계는 어떤 값과 코사인의 평균을 취하는데, 반각 공식(half-angle identity) $\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$를 쓰면 그 평균이 완전제곱(perfect square)이 된다. 그러면 b_{n+1}의 식에 있는 제곱근이 그 제곱을 다시 없애 준다. 각 항이 바로 앞 항을 인수(factor)로 포함한다는 사실을 알아차리면 일반적인 규칙은 쉽게 추측할 수 있고, 그것을 확인하는 일은 귀납법(induction)의 한 단계이다.

풀이

풀이 전체에서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$이므로, $k \geq 1$인 모든 각 $x/2^k$는 $(0, \frac{\pi}{4})$에 있고 그 코사인 값은 양수이다. b_{n+1}의 정의에 있는 제곱근은 양의 제곱근으로 택한다.

a_2와 b_2 구하기

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = (a_2 b_1)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

이다. 마지막 단계에서는 $\cos\frac{x}{2} > 0$임을 이용하였다.

a_3와 b_3 구하기

공통인수 $\cos\frac{x}{2}$를 묶어 낸 다음, 이번에는 $\theta = \frac{x}{2}$로 하여 반각 공식을 다시 쓴다.

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

그러면

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

이다. 두 코사인 값이 모두 양수이기 때문이다. 이것이 구하라는 두 식이다.

일반적인 규칙

지금까지 구한 항들을 비교하면

$$b_2 = \cos\frac{x}{2}, \quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}, \qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2}, \quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

각 b에는 각이 절반이 된 코사인이 하나씩 더 붙고, 각 a는 대응하는 b에 그 마지막 코사인을 한 번 더 곱한 것이다. 따라서 $n \geq 2$에 대하여 다음과 같이 추측한다.

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$

$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\,\cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

생각해 보기 추측한 식이 점화식을 만족함을 확인하려면 정확히 무엇을 확인해야 하는가?

두 가지를 확인한다. 하나는 추측한 식이 초깃값과 일치한다는 것이고, 다른 하나는 식이 a_n과 b_n에 대하여 성립하면 점화식으로부터 a_{n+1}과 b_{n+1}에 대한 식이 나온다는 것이다. 이 둘을 합하면 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다.

초깃값. $n = 2$일 때 추측한 식은 $b_2 = \cos\frac{x}{2}$와 $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$를 주며, 이는 위에서 구한 값과 일치한다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다고 하자. $\theta = x/2^{n-1}$로 놓으면 $x/2^n = \theta/2$이다. 그러면

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n \cdot \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b_{n+1}에 대한 추측은 $b_n\cos\frac{\theta}{2}$(각이 $x/2^n$인 코사인이 하나 더 붙은 것)이므로, 이 식은 $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$을 뜻하고, 이것이 바로 a_{n+1}에 대해 추측한 꼴이다. 다음으로

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

이다. 여기서 양의 제곱근을 택하였는데, b_n과 $\cos\frac{x}{2^n}$이 모두 양수이므로 이는 정당하다. 이것이 b_{n+1}에 대해 추측한 꼴이므로, 점화식의 두 식이 모두 만족되고 모든 $n \geq 2$에 대하여 식이 성립한다.

사실 빈 곱(empty product)을 1로 약속하면 이 식들은 $b_1 = 1$과 $a_1 = \cos x$도 주므로, $n = 1$부터 성립한다.

검산

- $x = \frac{\pi}{3}$로 놓자. 점화식을 직접 계산하면 $a_3 \approx 0.808013$, $b_3 \approx 0.836516$이고, $\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$와 $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$도 같은 값을 준다.
- $(0, \frac{\pi}{2})$에서 무작위로 고른 2000개의 x에 대하여 $n = 24$까지 점화식과 곱 공식을 비교하였더니, 10^{-15} 이내로 일치하였다.
- $x \to 0$일 때 모든 코사인 값은 1에 가까워지고, a_1과 b_1도 마찬가지이다. 따라서 모든 항이 마땅히 그래야 하듯 1에 가까워진다.

흔한 실수

- $\cos\theta > 0$인 이유를 밝히지 않고 $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$라고 쓰는 것. 여기서는 모든 각이 $(0, \frac{\pi}{4})$에 있으므로 성립한다.
- $n = 2$와 3으로부터 규칙을 추측하고 거기서 멈추는 것. 문제는 점화식을 만족함을 확인하라고 요구하므로 귀납 단계가 필요하다.

STEP 너머

b_n에 $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$을 곱하고 $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$를 반복해서 쓰면 $b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$을 얻는다. 이 값은 $n \to \infty$일 때 $\dfrac{\sin x}{x}$로 수렴(converge)한다($x = 1$이면 점화식을 수십 번 계산한 뒤 0.841471을 준다). $x = \frac{\pi}{2}$로 놓으면 $2/\pi$에 대한 비에트(Viète)의 무한곱(infinite product)을 얻는다. 평균을 취한 뒤 기하평균(geometric mean)을 취하는 이 방식은 가우스(Gauss)의 산술-기하 평균(arithmetic–geometric mean)과 가까운 친척이며, 수열이 수렴함을 증명하고 그 극한(limit)을 구하는 좋은 첫 예제가 된다. 수열의 극한을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.