풀이

STEP I 1998, 문제 5

순수수학 • 복소수와 회전

> **STEP I 1998, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q5

핵심 아이디어

두 소문항 모두 복소수(complex number)의 대수적 계산이 일을 대신 해 주도록 하는 문제이다. 소문항 (i)에서 정육각형(regular hexagon)의 한 꼭짓점에서 다음 꼭짓점으로 가는 것은 중심을 기준으로 60°만큼 회전(rotation)하는 것이고, 원점을 중심으로 하는 회전은 절댓값(modulus)이 1인 복소수를 곱하는 것과 같으므로 Q를 기준으로 생각한다. 소문항 (ii)에서 어떤 수가 실수인 것은 정확히 그 허수부(imaginary part)가 0일 때이므로, 각 분모를 실수화(realise)하고 허수부를 0으로 놓는다.

풀이

소문항 (i)

중심을 기준으로 생각한다. Q에서 A로 가는 벡터는

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

이다. 정육각형의 여섯 꼭짓점은 Q를 중심으로 하는 원 위에 같은 간격으로 놓여 있으므로 각 AQB는 $360° / 6 = 60°$이고, QB의 길이는 QA의 길이와 같다. **시계 방향**으로 움직인다는 것은 $-60°$만큼 회전한다는 뜻이며, 이는

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

을 곱하는 것이다.

> ? **생각해 보기** 왜 A 자체가 아니라 $A - Q$에 곱하는가?

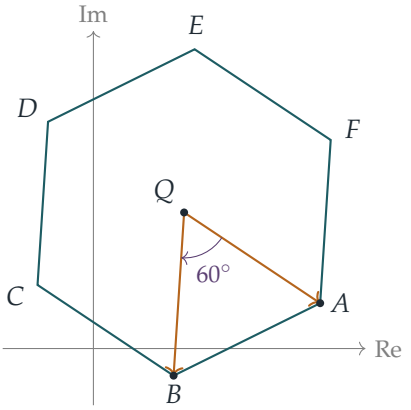
$e^{-i\pi/3}$을 곱하면 **원점**을 중심으로 회전한다. Q를 중심으로 회전하려면 Q를 원점으로 옮기고(Q를 빼고), 회전한 다음, 다시 되돌린다(Q를 더한다). 따라서

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

이고, 여기에 $Q = 4+6i$를 더하면

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$

이다.



그림으로 방향을 확인할 수 있다. Q의 오른쪽 아래에 있는 A에서 시계 방향으로 가면 다음 꼭짓점은 Q의 거의 바로 아래에 있으며, 우리가 구한 B도 그렇다.

소문항 (ii)

$(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$를 이용하여, 분자와 분모에 켤레복소수(conjugate)를 곱해 각 분모를 실수화한다.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

a, b, c가 실수이므로 식 전체의 허수부는

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

이다. 식이 실수인 것은 정확히 이 허수부가 0일 때이므로, 조건은

$$\boxed{5a+4b+3c = 0}.$$

이다. ($-5a-4b-3c = 0$처럼 0이 아닌 정수를 곱한 식도 모두 같은 조건이다.) 실제로 허수부를 정확히 구했으므로 이 조건은 충분조건이면서 필요조건이다.

검산

- 소문항 (i)에서 $|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$이다. 우리가 구한 B에 대하여 $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$이므로 B는 올바른 원 위에 있고, 수치적으로도 $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$이다. 삼각형 QAB가 정삼각형이므로 당연히 그래야 한다.
- 소문항 (ii)에서 ($5a+4b+3c=0$을 만족하는) $a=3$, $b=0$, $c=-5$를 넣어 보면 $\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) i = 1$ 이 되어 실수이다.
- $c = -(5a+4b)/3$인 무작위 순서쌍 10 000개로 수치 검사를 했더니 매번 허수부가 0이었다.

흔한 실수

- 시계 반대 방향으로 회전하면($e^{i\pi/3}$을 곱하면) $(7+2\sqrt{3}) + (4+3\sqrt{3})i$를 얻는데, 이것은 B가 아니라 꼭짓점 F이다.
- A를 Q가 아니라 원점을 중심으로 회전시킨다.
- 소문항 (ii)에서 **실수부**를 0으로 놓거나, 이런 식으로 허수부를 바로 읽어 내려면 a, b, c가 실수여야 한다는 것을 잊는다.

STEP 너머

$e^{i\theta}$를 곱하는 것은 회전이고, 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$는 회전과 확대 다음에 평행이동을 한 것이다. 이것들은 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 배우는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 가장 간단한 예이다. 원점을 중심으로 하는 정다각형의 꼭짓점이 z_0에 단위근(roots of unity)을 곱한 것이라는 사실은 수많은 대수학과 기하학의 출발점이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.