풀이

STEP I 1998, 문제 4

순수수학 • 제약 조건이 있는 최적화

STEP I 1998, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s1-q4

핵심 아이디어

원에 내접하는(inscribed) 직사각형은 대각선(diagonal)이 지름(diameter)이 되므로, 두 변의 길이 a와 b는 피타고라스(Pythagoras) 정리로 묶인다. 즉 $a^2 + b^2$이 고정된다. 그러면 모든 것은 $a^2 + b^2$을 일정하게 유지할 때 $a + b$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$이 어떻게 움직이는가 하는 문제가 된다. 경우 $n = 2$가 경첩 역할을 한다. 그보다 작으면 정사각형이 이기고, 그때는 모두 같으며, 그보다 크면 정사각형이 꼴찌가 된다.

풀이

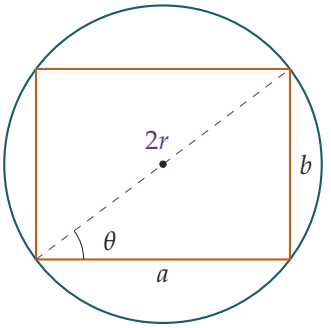
원의 반지름을 r, 직사각형의 두 변의 길이를 $a, b > 0$이라 하자. 직사각형의 각 꼭짓점의 각은 직각이므로 지름에 대한 원주각이다(반원에 대한 원주각). 따라서 각 대각선은 지름이고

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

역으로 $a^2 + b^2 = 4r^2$을 만족하는 임의의 $a, b > 0$은 꼭짓점이 원 위에 놓이도록 원 안에 들어가는 직사각형을 준다. 그러므로 다음과 같이 쓰면 편리하다.

$$a = 2r\cos\theta, \qquad b = 2r\sin\theta, \qquad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2},$$

여기서 θ는 대각선과 길이가 a인 변이 이루는 각이다.



둘레

둘레(perimeter)는 $P = 2(a+b)$이다. $(a-b)^2 \geq 0$이므로 $2ab \leq a^2 + b^2$이고, 따라서

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

이며, 등호는 $a = b$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. $a + b > 0$이므로 $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$을 얻는다. 즉

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

이고, 값 $4\sqrt{2}\,r$은 정확히 $a = b = \sqrt{2}\,r$일 때 얻어진다. 따라서 둘레가 가장 긴 직사각형은 요구한 대로 정사각형이다.

경우 $n = 2$

네 변의 길이의 제곱의 합은 직사각형이 무엇이든

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

이다. 따라서 모든 내접 직사각형이 같은 값을 준다. 어느 것을 고를 이유가 없으며, 특히 정사각형이 다른 어떤 직사각형보다 나을 것도 없다.

경우 $n = 3$

이제 $S = 2(a^3+b^3)$을 살펴보자. 각 변은 지름보다 짧으므로 $0 < a < 2r$이고 $0 < b < 2r$이며, 따라서 $a^3 < 2r\,a^2$이고 $b^3 < 2r\,b^2$이다. 두 식을 더하면

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

한편 $\theta \to 0$일 때($a \to 2r$, $b \to 0$인 길고 가는 직사각형) $S \to 2(2r)^3 = 16r^3$이다. 따라서 S는 $16r^3$에 원하는 만큼 가깝게 만들 수 있지만 결코 그 값에 도달하지는 않는다. **S가 최대인 직사각형은 존재하지 않는다.** $16r^3$을 얻는 유일한 "모양"은 퇴화된(degenerate) 것, 즉 지름을 두 번 그은 것뿐이며 이는 직사각형이 아니다.

? 생각해 보기 그렇다면 정사각형은 어떻게 된 것인가?

최선에서 최악으로 바뀌었다. $f(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$라 하면 $S = 16r^3 f(\theta)$이고

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta).$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 인수 $\sin\theta\cos\theta$는 양수이고, $\sin\theta - \cos\theta$는 $\theta < \frac{\pi}{4}$일 때 음수, $\theta > \frac{\pi}{4}$일 때 양수이다. 따라서 f는 감소하다가 증가하며, 정사각형($\theta = \frac{\pi}{4}$)이 **최솟값**을 준다.

$$S_{\min} = 16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\,r^3.$$

정리하면, $n = 3$일 때 S의 값은 구간 $[8\sqrt{2}\,r^3,\ 16r^3)$을 채운다. 정사각형이 최소가 되고, 최대가 되는 직사각형은 없다.

모든 $n > 2$에 대해서도 같은 일이 일어난다. $\cos\theta$와 $\sin\theta$가 모두 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos^n\theta + \sin^n\theta < \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고, 따라서 상한(supremum) $2(2r)^n$에는 직사각형을 납작하게 만들어야만 다가갈 수 있다.

검산

- $r = 1.7$로 두고 θ를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에 걸쳐 수치적으로 훑어보았다. 둘레는 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 최대이며 그 값은 $4\sqrt{2}\,r \approx 9.617$이다. 제곱의 합은 항상 $8r^2 = 23.12$이다. 세제곱의 합은 $16r^3 \approx 78.61$ 근처에서 정사각형일 때의 $8\sqrt{2}\,r^3 \approx 55.58$까지 떨어졌다가 다시 올라가며, 결코 78.61에 도달하지 않는다.
- 간단한 확인: 단위원 안의 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ 정사각형은 둘레가 $4\sqrt{2} \approx 5.66$인 반면, 1.9×0.62 직사각형(거의 지름)은 둘레가 약 5.04이다.

흔한 실수

- $n = 3$일 때 최댓값이 "$\theta = 0$에서" $16r^3$이라고 말하는 것. 그것은 선분이지 직사각형이 아니므로 최댓값은 존재하지 않는다. 반드시 그렇다고 밝히고 엄격한 부등식을 정당화해야 한다.
- $n = 3$일 때 정류점(stationary point) $\theta = \frac{\pi}{4}$를 찾고서 그 성질을 확인하지 않은 채 최댓값이라고 부르는 것.

STEP 너머

경우 $n = 3$은 **상한**과 **최댓값**(maximum)의 차이를 처음 맛보는 예이다. 열린 구간에서 연속인 함수는 그 경계값을 반드시 갖지는 않으며, 바로 이 때문에 최대·최소 정리(extreme

value theorem)는 닫힌 유계 구간을 요구한다. $n = 2$에서 일어나는 전환은 서로 다른 p에 대해 $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$을 비교하는 거듭제곱 평균 부등식(power-mean inequalities)의 한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 상한과 최대·최소 정리를 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.