풀이

STEP I 1998, 문제 3

순수수학 • 참 또는 거짓 증명

> **STEP I 1998, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q3

핵심 아이디어

각 소문항마다 필요한 도구가 다르며, 가장 먼저 할 일은 참인지 거짓인지 판단하는 것이다. "참"이라면 모든 경우를 다루는 증명(proof)이 필요하고, "거짓"이라면 반례(counterexample) 하나, 또는 요구되는 성질을 가진 대상이 존재할 수 없다는 논증만 있으면 된다. (i)은 로그(logarithm)를 취하면 해결되고, (ii)는 잘 고른 θ 값 하나로 해결되며, (iii)은 θ가 클 때 다항식(polynomial)의 거동으로, (iv)는 완전제곱식(perfect square)으로 해결된다.

풀이

소문항 (i): 참

$a > 0$이므로 $a = \mathrm{e}^{\ln a}$로 쓸 수 있다. 그러면

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \ln a}.$$

곱셈은 교환법칙(commutativity)이 성립하므로 두 지수(exponent)는 같고, 따라서 모든 $a, b > 0$에 대하여 $a^{\ln b} = b^{\ln a}$이다. (같은 말로, 양변은 모두 양수이고 로그값이 $\ln a \ln b$로 같다.)

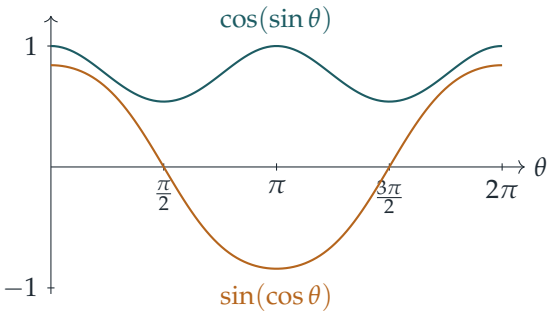
소문항 (ii): 거짓

반례 하나면 충분하다. $\theta = 0$으로 두면

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

$0 < 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \sin 1 < 1$이고(실제로 $\sin 1 \approx 0.841$), 따라서 양변은 다르며 주어진 명제는 거짓이다.

사실 양변은 **결코** 같아지지 않는다. 그래프를 보면 $\cos(\sin\theta)$가 항상 $\sin(\cos\theta)$보다 위에 있다.



이를 증명하려면(문제에서 요구하지는 않는다) $\sin(\cos\theta) \leq \sin|\cos\theta| = \cos(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|)$이고 $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$임에 주목한다. $|\sin\theta|$와 $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$는 모두 코사인이 감소하는(decreasing) 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 속하며, $|\sin\theta| + |\cos\theta| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$이다. 따라서 모든 θ에 대하여 $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$이다.

소문항 (iii): 거짓

P를 임의의 다항식이라 하자. 두 경우로 나누어, 어떤 실수 θ에 대하여 $|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$임을 보인다.

P가 상수인 경우, 즉 $\mathrm{P}(\theta) = c$라 하자. $\cos\theta$가 각각 1과 -1이 되는 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$를 이용하면, 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|c - 1| + |c + 1| \geq |(c + 1) - (c - 1)| = 2,$$

이므로 $|c - 1|$, $|c + 1|$ 중 적어도 하나는 1 이상이고, 이는 10^{-6}보다 훨씬 크다.

P의 차수(*degree*)**가 $n \geq 1$인 경우**, 즉 $a_n \neq 0$인 $\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$이라 하자. $\theta \neq 0$일 때

$$\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

이고, $\theta \to \infty$일 때 괄호 안은 1로 수렴하는 반면 $|a_n\theta^n| \to \infty$이다. 따라서 $|\mathrm{P}(\theta)| \to \infty$이고, $|\mathrm{P}(\theta)| > 2$인 θ를 고를 수 있다. 그러한 θ에 대하여 $|\cos\theta| \leq 1$이므로

$$|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| \geq |\mathrm{P}(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

두 경우 모두 어딘가에서 부등식이 성립하지 않으므로, 그러한 다항식은 존재하지 않는다.

생각해 보기 그런데 $\cos\theta$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는 원하는 만큼 가까워지는, 다항식과 비슷한 합이다. 왜 이것을 유한 항에서 끊은 것은 통하지 않을까?

유한 항에서 끊은 매클로린 급수는 항을 충분히 많이 택하면, 고정된 임의의 유계 구간에서 $\cos\theta$와의 차가 10^{-6} 이내가 **된다**. 그러나 주어진 명제는 **모든 실수** θ에 대하여 성립하는 다항식 하나를 요구하며, 상수가 아닌 다항식은 결국 모두 $\pm\infty$로 발산하는 반면 $\cos\theta$는 $[-1,1]$ 안에 갇혀 있다. 명제를 거짓으로 만드는 것은 바로 "모든 실수 θ에 대하여"라는 구절이다.

소문항 (iv): 참

$x>0$일 때

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

이다. 실수의 제곱은 음이 아니기 때문이다. 따라서 모든 $x>0$에 대하여 $x^4+3+x^{-4}\geq 5$이고, 등호는 정확히 $x^2=x^{-2}$일 때, 즉 $x=1$일 때 성립한다. (또는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$이다.)

요약: (i) 참, (ii) 거짓, (iii) 거짓, (iv) 참.

검산

- (i): $a=2, b=3$일 때 $2^{\ln 3}$과 $3^{\ln 2}$는 모두 약 2.141이다. 임의의 양수 a, b에 대해서도 상대 오차 약 10^{-15} 이내로 일치했다.
- (ii): 한 주기 전체에서 θ를 표본으로 뽑아 보면, $\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$는 약 0.107 아래로 내려간 적이 없었다.
- (iii): cos의 20차 매클로린 다항식은 $\theta=1$에서는 정확하지만, $\theta=10$에서는 약 7.5만큼, $\theta=30$에서는 약 10^{11}만큼 어긋난다.
- (iv): 촘촘한 격자에서 x^4+3+x^{-4}의 최솟값은 $x=1$에서 5이다.

흔한 실수

- 거짓인 명제를 몇 가지 값을 확인해 보고 "증명"하려 하거나, 참인 명제를 계산 실수로 "반증"하는 것. 답을 쓰기 전에 각 소문항이 참인지 거짓인지 먼저 판단하라.
- (iii)에서 상수 다항식을 빠뜨리는 것. "무한대로 발산한다"는 논증은 차수가 1 이상이어야 한다.

- (iii)에서 테일러 급수(Taylor series)를 모든 곳에서 통하는 다항식으로 인용하는 것. 그렇지 않다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 바이어슈트라스 근사 정리(Weierstrass approximation theorem)와 대비된다. 이 정리에 따르면 임의의 **닫힌 유계** 구간에서 모든 연속함수(continuous function)는 원하는 정확도로 다항식에 의해 균등하게(uniformly) 근사될 수 있다. 실수 전체에서의 균등 근사는 불가능한데, 그 이유는 바로 위의 증가 논증 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 바이어슈트라스 정리와 균등 수렴(uniform convergence)을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.