풀이

STEP I 1998, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1998, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q2

핵심 아이디어

다루기 까다로운 식 $(x^2+1)^{1/2}+x$가 f 안에 들어 있으므로, 이 식 전체를 t로 놓는 것이 자연스럽다. 놀랍게도 이 식은 거꾸로 풀기가 쉽다. 근호를 한쪽으로 분리한 뒤 제곱하면 x^2 항이 소거되어 x가 t의 간단한 함수로 남는다. 첫 번째 항등식(identity)을 얻고 나면, 두 번째 적분은 $f(t)=t^{-3}$인 특수한 경우일 뿐이다.

풀이

변수 바꾸기

다음과 같이 놓는다.

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

x가 0에서 ∞까지 변할 때 $(x^2+1)^{1/2}$와 x는 모두 증가하므로 t는 순증가(strictly increasing)한다. $x=0$일 때 $t=1$에서 출발하고, $x\to\infty$일 때 ∞로 발산한다. 따라서 이 치환(substitution)은 $[0,\infty)$를 $[1,\infty)$ 위로 보내는 일대일(one-to-one) 대응이고, 새로운 적분 구간의 끝은 1과 ∞이다.

> ? **생각해 보기** x를 다시 t로 나타내려면 어떻게 해야 할까?

제곱근을 분리하고 제곱한다. $t-x=(x^2+1)^{1/2}$로부터

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}(t-t^{-1}),$$

을 얻는다. 여기서 $t\geq 1$이므로 t로 나누어도 문제가 없다. (제곱하면 무연근(extraneous solution)이 생길 수 있지만, 여기서는 $t-x=(t+t^{-1})/2>0$이므로 제곱한 근호는 실제

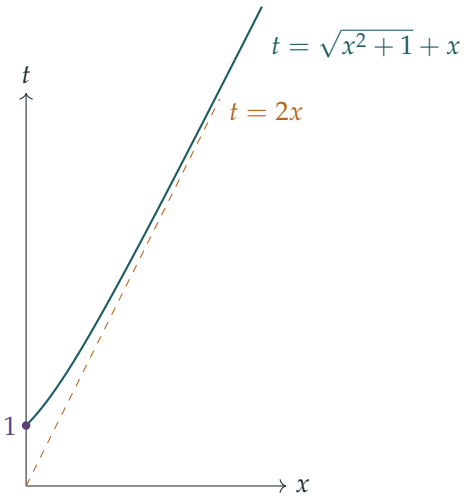
로 양수이다.) 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(1 + t^{-2}).$$

이다. 따라서

$$\int_0^\infty \mathrm{f}((x^2+1)^{1/2} + x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t) \cdot \frac{1}{2}(1+t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 구하려던 항등식이다.



그림을 보면 t가 1에서부터 꾸준히 증가하므로, 치역의 어느 부분도 두 번 덮이지 않는다.

마지막 소문항

$\mathrm{f}(t) = t^{-3}$으로 놓는다. 그러면 항등식의 좌변이 정확히 구하려는 적분이 되므로

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ((x^2+1)^{1/2} + x)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}t^{-2} - \tfrac{1}{4}t^{-4}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. t^{-3}과 t^{-5}는 $[1,\infty)$에서 적분 가능하므로 두 이상적분(improper integral)은 모두 수렴한다.

? **생각해 보기** 이 치환을 더 깔끔하게 이해하는 방법이 있을까?

있다. $x = \sinh\theta$로 놓으면 $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$이므로 $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^\theta$이다. 앞에서 얻은 식 $x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$은 사실 $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta})$가 모습을 바꾼 것일 뿐이다.

검산

- $x = 0$일 때 $t = 1$이고 $x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$이므로 역함수(inverse function) 식이 맞는다. $x = \frac{3}{4}$일 때 $t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$이고 $\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$이다.
- x가 클 때 $t \approx 2x$이므로 마지막 소문항의 피적분함수(integrand)는 $(2x)^{-3}$처럼 행동하고, 따라서 적분은 확실히 수렴한다.
- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하여 수치 계산하면 0.375000이 나와 $\frac{3}{8}$과 일치한다. 첫 번째 소문항의 항등식도 $f(t) = e^{-t}$(양변 모두 0.258187)와 $f(t) = 1/(1+t^4)$(양변 모두 0.188387)에 대해 수치적으로 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 실수. 아래끝은 $t = 0$이 아니라 $t = 1$이 된다.
- dt를 x로 나타낸 뒤 x를 소거하느라 애를 먹는 실수. x를 먼저 t로 나타내고 그것을 미분하는 편이 훨씬 쉽다.

STEP 너머

이 항등식은 단조(monotonic) 함수에 의한 변수 변환에 관한 명제이며, 해석학에서는 이상적분의 경우 $[0, X]$에서의 적분의 극한을 취함으로써 이를 정당화한다. 이 치환 자체는 sinh의 역함수와 관련이 있다. 즉 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$이고, 이 때문에 t가 $e^{\operatorname{arsinh} x}$가 되는 것이다. 이상적분과 치환을 엄밀하게 다룬 내용은 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.