풀이

STEP I 1998, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP I 1998, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q14

핵심 아이디어

동전이 어디에 떨어지는지에 관한 모든 정보는 동전의 **중심**이 어디에 떨어지는지에 담겨 있다. 판의 무늬가 규칙적이므로 중심이 하나의 2×2 정사각형 위에서 균등분포(uniformly distributed)를 따른다고 볼 수 있고, 그러면 각 결과는 그 정사각형의 한 영역에 대응한다. "선을 가로지른다"와 "교차점을 덮는다"를 중심에서 선과 꼭짓점까지의 거리에 대한 조건으로 바꾸면 확률(probability)은 넓이가 되고, 이것은 a에 대한 이차식(quadratic)이므로 최댓값을 구할 수 있다.

풀이

세금이 두 배가 될 확률

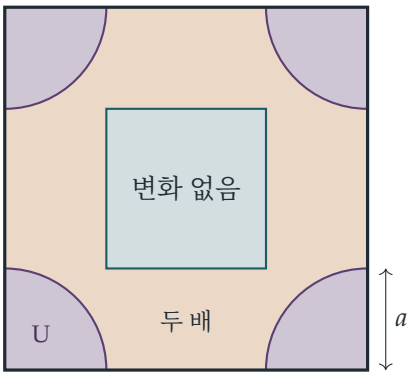
동전의 중심이 격자의 한 정사각형 안에 균등하게 무작위로 떨어진다고 모형화한다. 판이 충분히 크므로 가장자리 효과는 무시할 수 있고, 모든 정사각형은 똑같아 보인다. 이 정사각형이 $[0,2] \times [0,2]$가 되고 격자선이 그 변을 따라 놓이도록 좌표를 잡는다.

중심에서 가장 가까운 세로선까지의 거리를 U, 가장 가까운 가로선까지의 거리를 V라 하자. x좌표가 $[0,2]$에서 균등분포를 따르므로 $U = \min(x, 2-x)$는 $[0,1]$에서 균등분포를 따른다. 마찬가지로 V도 $[0,1]$에서 균등분포를 따르며, x와 y가 독립(independent)이므로 U, V도 독립이다. 따라서 (U,V)는 단위정사각형 $[0,1]^2$에서 균등분포를 따르고, 확률은 그 정사각형 안의 넓이일 뿐이다.

- 동전이 어떤 선도 가로지르지 않는 것은 정확히 $U > a$이고 $V > a$일 때이다. 이 확률은 $(1-a)^2$이다.

▶ 동전이 교차점을 덮는 것은 정확히 정사각형의 가장 가까운 꼭짓점이 중심으로부터 a 이내에 있을 때, 즉 $U^2 + V^2 < a^2$일 때이다. $a < 1$이므로 이 사분원은 $[0,1]^2$ 안에 완전히 들어가고, 따라서 확률은 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다.

이 두 사건은 서로 배반(disjoint)이다. 동전이 교차점을 덮으면 그 점을 지나는 선들을 당연히 가로지르기 때문이다. (동전이 선에 딱 닿는 경우 같은 경계의 경우는 확률이 0이므로 $<$와 $\leq$ 중 어느 것을 쓰든 상관없다.)



2

그림은 한 정사각형 안에서 중심이 놓일 수 있는 위치를 보여 준다. 청록색(어떤 선도 가로지르지 않음)과 자주색(교차점을 덮음, 한 꼭짓점에 U로 표시)은 세금을 그대로 두고, 호박색은 세금을 두 배로 만든다.

따라서 세금이 두 배가 될 확률은

$$\begin{aligned} p(a) &= 1 - (1-a)^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a^2. \end{aligned}$$

이다.

세금의 최대화

세금을 가장 많이 걷으려면 두 배가 될 가능성이 가능한 한 커야 하므로 $0 < a < 1$에서 $p(a)$를 최대화한다. 이것은 최고차항의 계수가 음수인 이차식이고,

$$p'(a) = 2 - 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a = 0 \iff a = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

이 값은 $\frac{4}{4+\pi} \approx 0.560$으로 실제로 $(0,1)$ 안에 있으며, $p''(a) < 0$이므로 요구한 대로 최댓값을 준다. 이 값을 a^*라 쓰면 $(1 + \frac{\pi}{4})a^{*2} = a^*$이므로 최댓값은

$$p_{\max} = 2a^* - a^* = a^* = \frac{4}{4+\pi}.$$

이다.

n년 후 세금의 기댓값

생각해 보기 매년의 기대 증가 배율이 $2p$가 아니라 $1+p$인 이유는 무엇인가?

세금이 두 배가 되지 않는 해에는 세금이 그대로 유지되므로 0이 아니라 1이 곱해진다. k번째 해의 배율을 M_k라 하자. 확률 p로 $M_k = 2$이고 확률 $1-p$로 $M_k = 1$이다. 그러면

$$\mathrm{E}(M_k) = 2p + (1-p) = 1 + p = 1 + \frac{4}{4+\pi} = \frac{8+\pi}{4+\pi}.$$

이다. 매년의 던지기가 서로 독립이라고 가정하자. (1에서 시작할 때) n년 후의 세금은 야크 한 마리당 $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ 슬리힝(Slihings)이고, 독립인 확률변수(random variable)들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이므로

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2)\cdots\mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^n,$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.

검산

- $a \to 0$이면 동전은 거의 선에 닿지 않고, $a = 1$이면 언제나 선을 가로지르므로 $p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$이며, 이는 꼭짓점의 원판을 피할 확률이다. 두 경우 모두 공식과 일치하고, 최댓값은 그 사이에 있다.
- 무작위 중심 400 000개로 시뮬레이션한 결과 $a = 0.56$에서 $p \approx 0.5620$을 얻었고, 공식의 값은 0.5601이다. a에 대해 촘촘하게 탐색하면 최댓값은 $a \approx 0.5601 = 4/(4+\pi)$에서 나타난다.
- $p = 4/(4+\pi)$로 매년 두 배가 되는 과정을 시뮬레이션하니 3년 후 세금의 평균이 약 3.805였고, $\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$과 비교된다.

흔한 실수

- "교차점을 덮는" 넓이를 "선을 가로지르지 않는" 넓이에서 빼거나 두 번 세는 실수. 두 사건은 서로 배반이며, 둘 다 1에서 빼야 한다.
- 각 꼭짓점에서 원판 전체 πa^2을 쓰고, 그중 4분의 1만 정사각형 안에 있다는 것(또는 같은 말로, 각 꼭짓점의 원판을 네 정사각형이 나누어 가진다는 것)을 잊는 실수.
- 세금의 기댓값을 $(2p)^n$으로 쓰는 실수. 두 배가 되지 않는 해에는 세금이 그대로라는 것을 잊은 것이다.

STEP 너머

이 문제는 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제와 사촌 격이다. 무작위로 놓인 물체를 기본 영역 안의 무작위 점으로 환원하면 확률은 넓이가 된다. 이 아이디어는 **기하학적 확률**(geometric probability)과 적분기하학(integral geometry)의 출발점으로, 바늘을 던져 π를 추정하는 것과 같은 놀라운 결과를 준다. 마지막 부분에서는 독립인 확률변수들의 기댓값이 곱해진다는 사실을 사용했는데, 이는 금융과 개체군 생물학에서 쓰이는 곱셈적 성장 모형의 바탕이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.