풀이

STEP I 1998, 문제 11

역학 • 도르래에 걸린 연결된 입자

> **STEP I 1998, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q11

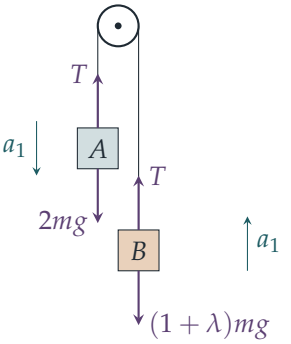
핵심 아이디어

한 번의 왕복은 두 단계로 이루어지고, 각 단계에서 질량이 일정하므로 가속도(acceleration)도 일정하다. 따라서 $s = \frac{1}{2}at^2$를 쓸 수 있다. 내려갈 때는 물이 가득 찬 양동이가 광석과 양동이보다 무거워서, 두 양동이가 하나의 애트우드 기계(Atwood machine)처럼 움직인다. 다시 올라갈 때는 양동이 A가 비어 있고 질량이 없으므로 B를 붙잡아 주는 것이 아무것도 없다. 즉 B는 그냥 자유낙하(free fall)한다. 둘째 부분에서 "아주 오랜 시간 동안 가장 많은 광석"은 "한 주기당 광석을 한 주기당 시간으로 나눈 값이 가장 크다"는 뜻이다.

풀이

한 주기에 걸리는 시간

모형: 양동이와 그 내용물은 입자(particle)이고, 사슬은 가볍고 늘어나지 않으며, 도르래(pulley)는 작고 매끄럽고 가볍다. 따라서 장력(tension) T는 사슬의 양 끝에서 같고, 두 양동이는 같은 속력으로 움직인다. A가 꼭대기에 있을 때 B는 바닥에 있으므로(사슬의 길이는 l이다), 각 단계에서 각 양동이는 거리 l만큼 움직인다.



1단계: A가 내려간다. 양동이 A에는 $2m$의 물이 담겨 있고, 양동이 B의 전체 질량은 $m + \lambda m = (1+\lambda)m$이다. 공통 가속도를 a_1이라 하자(A는 아래로, B는 위로 움직인다). 각 양동이에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} A\text{ (아래 방향)}: &\quad 2mg - T = 2ma_1, \\ B\text{ (위 방향)}: &\quad T - (1+\lambda)mg = (1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$(1-\lambda)mg = (3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

이 값은 $\lambda < 1$이므로 양수이고, 따라서 A는 실제로 내려간다. 정지 상태에서 출발하여 일정한 가속도로 거리 l을 이동하므로 $l = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$이고, 따라서

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

? **생각해 보기** 2단계에서 양동이 A는 질량이 전혀 없다. 사슬의 장력은 얼마인가?

2단계: B가 내려간다. 이제 A는 비어 있어서 질량이 없고, B의 질량은 m이다. 질량이 없는 양동이 A에 대해 뉴턴의 법칙은 $T - 0\cdot g = 0\cdot a$가 되므로 $T = 0$이다. 질량을 가진 것에 연결되어 있지 않은 가벼운 사슬은 아무것도 당길 수 없다. 따라서 B는 정지 상태에서 가속도 g로 거리 l만큼 자유낙하하고, $l = \frac{1}{2}gt_2^2$에서

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

(질량이 0과 m인 경우의 애트우드 공식에서도 같은 답이 나온다: $a = \frac{m-0}{m+0}g = g$.) 이 단계가 끝날 때 A는 처음으로 다시 꼭대기에 돌아온다.

합계. A를 꼭대기에서 놓은 순간부터 처음으로 꼭대기에 돌아올 때까지 걸리는 시간은

$$\boxed{t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

끌어올리는 광석의 양 최대화하기

주기 시간을 $\tau(\lambda) = t_1 + t_2$라 쓰자. 각 주기마다 질량 λm의 광석이 올라가고, 이 과정은 똑같이 반복된다. 긴 시간 S 동안 완전한 주기는 $\lfloor S/\tau \rfloor$번 있으므로, 끌어올린 광석의 양은 $\lambda m\,(S/\tau - 1)$과 $\lambda m\, S/\tau$ 사이에 있다. S가 τ에 비해 아주 크면 마치지 못한 일부 주기는 무시할 수 있으므로, 끌어올린 광석의 양은 사실상

$$\frac{\lambda m S}{\tau(\lambda)} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

인자 $mS\sqrt{g/2l}$는 λ에 의존하지 않으므로, $\mathrm{f}(\lambda)$가 가능한 한 커지도록 $\lambda \in (0,1)$를 골라야 한다.

> **생각해 보기** 최적의 λ가 끝점이 아니라 정류점(stationary point)이어야 하는 이유는 무엇인가?

함수 f는 $(0,1)$에서 미분가능(differentiable)하다. 그 구간에서 $1-\lambda > 0$이고 $3+\lambda > 0$이며 분모가 양수이기 때문이다. 이 함수는 $(0,1)$에서 양수이고, 양 끝에서 0으로 수렴(converge)한다. $\lambda \to 0$이면 인자 λ가 사라지고(광석을 전혀 나르지 않는다), $\lambda \to 1$이면 인자 $(1-\lambda)^{1/2}$가 사라진다(두 양동이가 거의 균형을 이루므로 1단계가 아주 오래 걸린다). 따라서 f의 최댓값은 내부의 점에서 나타나고, 미분가능한 함수가 내부의 점에서 최댓값을 가지면 그 점에서 도함수(derivative)는 0이다. 따라서 최적의 λ는 요구된 대로 $\mathrm{f}'(\lambda) = 0$을 만족한다.

검산

- 극한의 경우: $\lambda \to 1$이면 1단계에서 두 양동이의 질량은 $2m$과 $2m$이 되므로 $a_1 \to 0$이고 $t_1 \to \infty$이다. 이는 공식과 일치한다.
- $\lambda \to 0$이면 $a_1 = g/3$을 얻는데, 이는 질량이 $2m$과 m일 때의 통상적인 애트우드 값이다.
- $g = 9.8$로 두고 임의의 λ와 l에 대해 운동을 수치적으로 단계별 계산한 결과가 공식과 일치하였다. 예를 들어 $\lambda = 0.504$, $l = 26.9$이면 한 주기는 8.568 s이다. f를 수치적으로 최대화하면 $\lambda \approx 0.704$를 얻고, 긴 시간 동안의 완전한 주기를 세어 보아도 같은 최적의 λ를 얻는다.

흔한 실수

- 양동이 B 자체의 질량 m을 잊고, 1단계에서 $(1+\lambda)m$ 대신 λm을 쓰는 것.
- 2단계를 장력이 있는 애트우드 기계로 다루는 것: A의 질량이 없으므로 B는 자유낙하한다.

- 단위 시간당 광석 대신 한 주기당 광석 λm을 최대화하는 것. 짐이 클수록 주기가 느려진다.

STEP 너머

비율(한 주기당 산출량을 한 주기당 시간으로 나눈 값)을 최적화한다는 것은 확률론의 **재생 보상 정리**(renewal–reward theorem)의 바탕에 있는 아이디어이다. 이 정리에서는 주기의 길이가 확률적이지만, 장기적인 보상률은 여전히 한 주기당 평균 보상을 평균 주기 길이로 나눈 값이다. 여기서 다룬 역학은 등가속도 운동이며, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이를 입자계에 대한 완전한 논의로 발전시킨다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.