풀이

# STEP I 1998, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 1998, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q10

## 핵심 아이디어

우리는 발사각을 모르고, 알 필요도 없다. 답은 $v$, $r$, $t$만으로 나타내야 한다. 따라서 각을 소거하는 관계식을 찾아야 한다. 가장 깔끔한 방법은 벡터로 생각하는 것이다. 시간 $t$가 지난 뒤 입자가 떨어지는 위치는 초기 속도에 $t$를 곱한 것에, 중력 때문에 생기는 낙하 $\frac{1}{2}gt^2$를 더한 것이다. 이 세 벡터는 직각삼각형을 이루고, 나머지는 피타고라스(Pythagoras) 정리가 해결한다.

## 풀이

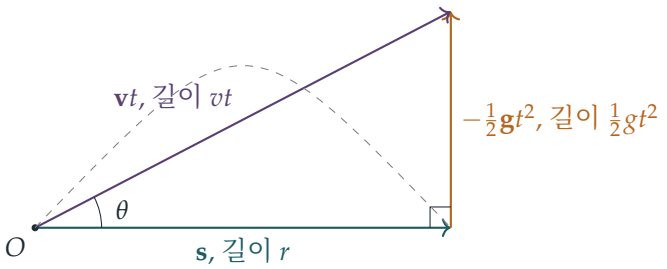
흙의 각 입자를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 점입자로 모형화하고, 지면 높이에 있는 폭발의 중심 $O$에서 출발한다고 하자. 똑바로 위로 올라간 입자는 $O$에 떨어지므로, $r > 0$이라 하고 수평면 위로 잰 발사각(angle of projection) $\theta$는 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$라고 할 수 있다.

### 착지 시간

일정한 가속도 $\mathbf{g}$(연직 아래 방향)를 받을 때, 시간 $t$가 지난 뒤의 변위(displacement)는

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

이다. 여기서 $\mathbf{v}$는 크기가 $v$인 초기 속도이다. 착지하는 순간 $\mathbf{s}$는 길이가 $r$인 수평 벡터이다. 식을 정리하면 $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$이고, 이것은 길이가 $r$인 수평 벡터와 길이가 $\frac{1}{2}gt^2$인 연직(위 방향) 벡터의 합이다.




이 두 벡터는 서로 수직이므로, 피타고라스 정리에 의해

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

이다. 양변에 $g^2$을 곱하고 $u = \frac{1}{2}g^2t^2$이라 두면($u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$이고 $g^2v^2t^2 = 2v^2u$이다), 이 식은

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

이 되어 $u$에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 그 근은

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

**?** **생각해 보기** 벡터를 쓰지 않는다면 $\theta$를 어떻게 없앨 수 있을까?

성분을 이용한다. 수평 방향으로는 $r = vt\cos\theta$이고, 연직 방향으로는 지면 높이에 착지한다는 것이 $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$을 뜻하므로 ($t \neq 0$이므로) $vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$이다. 두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 쓰면 다시 정확히 $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$을 얻는다. 벡터 그림은 바로 이 계산을 삼각형으로 그려 놓은 것일 뿐이다.

두 근이 모두 실수인 것은 $v^4 \geq g^2r^2$, 즉 $r \leq v^2/g$일 때뿐이다. 이것이 잘 알려진 최대 사거리(maximum range)이다. $r < v^2/g$일 때 두 근은 모두 양수이므로(두 근의 곱은 $g^2r^2 > 0$이고 합은 $2v^2 > 0$이다) 착지 시간이 두 개 있으며, 하나는 가파른 발사, 다른 하나는 완만한 발사에 해당한다. $t = 2v\sin\theta/g$는 $\theta$에 대해 증가하므로, $+$ 부호는 더 가파른 궤적 $\theta > \frac{\pi}{4}$에, $-$ 부호는 더 평평한 궤적에 해당한다.

### 최고 높이

비행은 대칭적이다. 연직 속도 $v\sin\theta - gt'$은 비행의 한가운데인 $t' = \frac{1}{2}t$에서 0이 된다. 꼭대기에서부터 입자는 (연직 방향으로) 정지 상태에서 시간 $\frac{1}{2}t$ 동안 떨어지므로, 최고 높이는

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

이다. 앞부분의 결과를 이용하면

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2 r^2}}{4g},$$

이고, $+$ 부호는 더 가파른 궤적, $-$ 부호는 더 평평한 궤적에 해당한다($r < v^2/g$일 때 둘 다 가능하며, $r = v^2/g$일 때는 $H = v^2/(4g)$에서 서로 일치한다).

## 검산

- 연직 발사: $r = 0$이면 $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$이므로 $t = 2v/g$이고 $H = v^2/(2g)$이며, 이는 옳다. 다른 근 $t = 0$, $H = 0$은 지면을 스치듯 날아가는 발사에 해당한다.
- 두 높이의 합은 $v^2/(2g)$이다. 당연한 결과이다. 두 궤적은 서로 여각인 $\theta$와 $\frac{\pi}{2} - \theta$를 가지며, $\frac{v^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2 \cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$이기 때문이다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $v = 20$, $\theta = 1$ 라디안으로 두고 운동을 단계적으로 계산하면 $t \approx 3.4346$, $H \approx 14.450$을 얻는다. $+$ 부호를 택한 공식도 3.4346과 14.450을 준다. 여각에 대한 결과는 $-$ 부호와 일치한다($t \approx 2.2053$, $H \approx 5.958$).

## 흔한 실수

- 높이를 하나만 제시하는 것. 속력이 같은 입자는 서로 다른 두 경로로 같은 점에 도달할 수 있으며, $\pm$는 $H$까지 그대로 이어진다.
- $H$를 $\theta$로 나타내고 멈추는 것. 문제는 $v$, $r$, $g$만으로 나타내기를 요구하므로, 앞부분과 연결해 주는 관계 $H = \frac{1}{8}gt^2$을 쓰는 것이 효율적인 방법이다.

## STEP 너머

$t^2$에 대한 이차방정식은 "궤적의 포락선(envelope of trajectories)"을 시간 영역에서 나타낸 것이다. $v^4 = g^2r^2$을 만족하는 점들(그리고 지면을 벗어나서는 포물면 $z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$)은 흙이 도달할 수 있는 영역의 경계를 이루며, 그 내부의 모든 점은 정확히 두 개의 궤적에 의해 맞는다. 곡선족의 포락선은 대학 1학년 과정에서 편미분(partial differentiation)을 멋지게 응용하는 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 벡터 운동학을 알맞은 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.