풀이

STEP I 1998, 문제 1

순수수학 • 숫자 패턴의 개수 세기

> **STEP I 1998, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

핵심 아이디어

수를 하나하나 나열하려 하지 말자. 그 대신 먼저 어떤 두 숫자가 나타나는지 고른 다음, 그 두 숫자를 모두 사용하는 다섯 자리 문자열의 개수를 센다. 유일한 걸림돌은 수가 0으로 시작할 수 없다는 점이므로, 두 숫자 중 하나가 0인지 아닌지에 따라 경우를 나누어 센다. 그리고 범위의 양 끝을 확인하는 것도 잊지 말자.

풀이

10 000부터 99 999까지의 모든 정수는 첫째 자리가 0이 아닌 정확히 다섯 자리 수이다. 범위 안에 남은 정수는 100 000 하나뿐이며, 이것은 마지막에 따로 다룬다.

다섯 자리 수가 정확히 두 종류의 서로 다른 숫자를 포함한다는 것은, 그 수의 모든 자리 숫자가 어떤 쌍 $\{a, b\}$에서 나오고 a와 b가 실제로 둘 다 나타난다는 뜻이다. 이러한 수는 각각 자신의 쌍을 하나로 결정하므로, 쌍별로 개수를 세어 더하면 된다.

경우 1: 두 숫자 모두 0이 아닌 경우

$1, 2, \ldots, 9$에서 서로 다른 두 숫자를 고르는 방법은 $\binom{9}{2} = 36$가지이다. 쌍 $\{a, b\}$를 하나 고정하면, 다섯 자리 각각에 a 또는 b가 올 수 있으므로 문자열은 $2^5 = 32$개이다. 이 가운데 두 개($aaaaa$와 $bbbbb$)는 한 숫자만 사용하므로, 두 숫자를 모두 사용하는 것은 $32 - 2 = 30$개이다. 이들 중 0으로 시작하는 것은 없으므로 30개 모두 진짜 다섯 자리 수이다. 따라서 이 경우의 개수는

$$36 \times 30 = 1080.$$

? **생각해 보기** 쌍 $\{0, a\}$는 왜 똑같은 방법으로 다룰 수 없을까?

0과 a로 만든 32개의 문자열 중 절반은 0으로 시작하는데, 이들은 다섯 자리 수가 아니기 때문이다(예를 들어 $0a0aa$는 사실 네 자리 수이다). 그래서 개수를 세기 전에 첫째 자리를 먼저 고정해야 한다.

경우 2: 두 숫자 중 하나가 0인 경우

다른 숫자 a는 $1, \ldots, 9$ 중 어느 것이든 될 수 있으므로 9가지이다. 첫째 자리는 0일 수 없으므로 반드시 a이다. 나머지 네 자리 각각에는 0 또는 a가 올 수 있으므로 $2^4 = 16$가지 경우가 있다. 이 가운데 정확히 하나인 $aaaa$는 0을 포함하지 않아서 서로 다른 숫자가 하나만 남게 된다. 따라서 각 a마다 $16 - 1 = 15$개의 수가 있고, 이 경우의 개수는

$$9 \times 15 = 135.$$

끝점 100 000

범위는 양 끝을 포함하며, 100 000은 숫자 1과 0만 사용하므로 이것도 세어야 한다.

합계

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

따라서 조건을 만족하는 정수는 **1216**개이다.

검산

- 10 000부터 100 000까지의 모든 정수를 차례로 살펴보며 자릿수들의 집합의 크기가 2인 것을 세는 컴퓨터 검산을 하면 1216이 나온다. 이 검산으로 경우의 분할도 확인된다. 0이 없는 것이 1080개, 0이 있는 것이 135개, 그리고 100 000이다.
- 손으로 나열할 수 있는 더 작은 경우에 같은 방법을 적용해 보자. 두 자리 수에 대해서는 $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$이 나온다. 이는 직접 센 결과와 일치한다. 두 자리 수 90개에서 같은 숫자로만 이루어진 수(repdigit) $11, 22, \ldots, 99$의 9개를 빼면 된다.

흔한 실수

- 100 000을 빠뜨려서 1215라고 답하는 실수. "양 끝을 포함하는" 범위에서는 항상 끝점을 살펴보아야 한다.
- $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$으로 세는 실수. 이렇게 하면 0으로 시작하는 수까지 포함된다.

- 경우 2에서 1 대신 2를 빼는 실수. 모든 자리가 0인 문자열은 첫째 자리를 a로 고정할 때 이미 제외되었다.

STEP 너머

$\{a, b\}$로 만든 모든 문자열에서 한 숫자만 쓰는 문자열을 빼는 요령은 포함배제의 원리(inclusion–exclusion principle)의 가장 간단한 경우이다. 일반적으로, 주어진 k개의 기호를 **모두** 사용하는 길이 n인 문자열의 개수는 $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$이며, 이는 제2종 스털링 수(Stirling number of the second kind)에 $k!$을 곱한 값이다. 이러한 개수는 조합론(combinatorics)과 확률(probability) 곳곳에서 나타나며, 예를 들어 쿠폰 수집가 문제(coupon collector problem)에도 등장한다. 이런 종류의 세기를 더 공부하고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 실린 조합론 문제들을 풀어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.