풀이

STEP III 1997, 문제 9

역학 • 탄성 용수철이 있는 정역학

STEP III 1997, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q9

핵심 아이디어

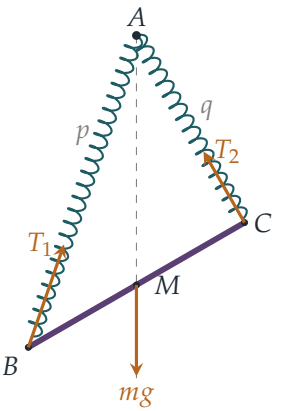
막대에 작용하는 힘은 두 용수철의 장력과 막대의 무게, 이렇게 세 개뿐이다. 평행하지 않은 세 힘을 받아 평형(equilibrium)을 이루는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 반드시 한 점에서 만나야 한다. 두 장력은 모두 A를 지나는 직선을 따라 작용하므로 무게의 작용선도 A를 지나야 하고, 따라서 막대의 중점은 A의 바로 아래에 놓인다. 그다음에는 수평 방향으로 힘을 분해하면 거의 끝난다.

풀이

막대는 질량이 m이고 중점이 M인 균일한 강체로 모형화한다. 용수철은 가볍고, 같은 상수 κ로 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르며, 둘 다 늘어나 있다. 용수철 AB와 AC의 자연 길이(natural length)를 각각 a와 b, 늘어난 길이를 각각 p와 q라 하면 장력은

$$T_1 = \kappa(p - a), \qquad T_2 = \kappa(q - b),$$

이고, 용수철이 늘어나 있으므로 둘 다 양수이다.



1단계: M은 A의 바로 아래에 있다

막대에 대해 A를 중심으로 모멘트(moment)를 계산한다. 장력 T_1은 BA를 따라, T_2는 CA를 따라 작용하므로 두 작용선 모두 A를 지나고, 어느 쪽도 A에 대한 모멘트가 없다. 따라서 M을 지나 연직 방향으로 작용하는 무게도 A에 대한 모멘트가 0이어야 하므로, M을 지나는 연직선은 A를 지난다. 그러므로 M은 A의 바로 아래에 있다. A로부터 M까지의 깊이를 $h > 0$이라 하자.

2단계: 수평 방향으로 분해하기

A를 원점으로 하고, x축은 (막대를 포함하는 연직 평면 안에서) 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 좌표축을 잡는다. 그러면 $M = (0, -h)$이고, M이 BC의 중점이므로 어떤 d, e에 대하여

$$B = (-d, -h - e), \qquad C = (d, -h + e)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 d는 막대의 수평 방향 반폭이며, 막대가 연직이 아니라는 것이 바로 $d \neq 0$이라는 뜻이다.

AB의 장력은 B에서 막대에 B로부터 A를 향하는 방향, 즉 길이가 p인 벡터 $\overrightarrow{BA} = (d, h + e)$의 방향으로 작용한다. 따라서 이 힘은 $\dfrac{T_1}{p}(d, h + e)$이다. 마찬가지로 C에서의 장력은 $\dfrac{T_2}{q}(-d, h - e)$이다.

수평 방향으로 분해하면

$$\frac{T_1}{p}\, d - \frac{T_2}{q}\, d = 0,$$

이고, $d \neq 0$이므로

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

생각해 보기 막대가 연직이 아니라는 사실을 정확히 어디에서 사용했는가?

d를 약분할 때뿐이다. 막대가 연직으로 매달려 있다면 두 용수철은 같은 연직선 위에 놓이고, 수평 방향의 분해는 $0 = 0$이 되며, 장력은 연직 방향의 힘의 평형만 만족하면 어떤 비율이든 될 수 있다. 이런 연직 평형은 실제로 존재하며, 이 경우에는 일반적으로 결과가 성립하지 않는다.

3단계: 훅의 법칙 적용하기

장력을 대입하면

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

이므로

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

늘어난 길이의 비는 자연 길이의 비와 같고, 이것이 보이려던 것이다. ■

덧붙이자면, 연직 방향으로 분해하면 $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$, 즉 $2h\,\frac{T_1}{p} = mg$를 얻는다. 이 식은 필요하지 않지만, T/길이의 공통값을 결정해 준다.

검산

- **해석.** $p/q = a/b$이므로 두 용수철은 같은 배율로 늘어난다. 즉 어떤 $\lambda > 1$에 대하여 $p = \lambda a, q = \lambda b$이다. 따라서 두 용수철은 하나의 균일한 용수철을 비례적으로 늘인 것처럼 행동하며, 이는 답을 기억하는 깔끔한 방법이다.
- **수치 검증.** 임의의 m, κ, a, b와 막대 길이에 대하여 퍼텐셜 에너지(potential energy) $mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$를 수치적으로 최소화하여 평형을 구하였다. 예를 들어 $a/b = 0.709972$일 때 기울어진 평형에서 $p/q = 0.709972$를 얻었고, M은 10^{-7} 이내의 오차로 A의 바로 아래에 있었다. 같은 탐색에서 $p/q \neq a/b$인 연직 평형도 발견되었는데(예를 들어 $a/b = 1.526$이지만 $p/q = 1.192$), 이는 가정이 꼭 필요하다는 것을 확인해 준다.

흔한 실수

- 장력이 같다거나 두 용수철이 연직선과 같은 각을 이룬다고 가정하는 것. 둘 다 일반적으로는 성립하지 않는다. 같아지는 것은 장력을 길이로 나눈 값이다.
- M을 중심으로 모멘트를 계산하다가 각도 계산에 얽히는 것. 두 장력이 모두 A를 지나므로 A를 중심으로 한 모멘트가 훨씬 깔끔하다.

- 막대가 연직이 아니라는 조건을 한 번도 사용하지 않는 것. 완전한 답안이라면 그 조건이 어디에서 필요한지 밝혀야 한다.

STEP 너머

우리가 사용한 벡터 $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$는 용수철의 힘을 나타내는 자연스러운 방법이다. 자연 길이가 0인 용수철은 변위 벡터에 정확히 비례하는 힘을 작용하며, 이러한 "이상적인" 용수철을 쓰면 많은 평형 문제가 선형대수(linear algebra) 문제로 바뀐다. 더 일반적으로, 평형은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이며, 이것이 우리의 수치 검증의 바탕이 된 아이디어이자 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학과 에너지 관점을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.