풀이

STEP III 1997, 문제 8

순수수학 • 이차形식의 대각화

STEP III 1997, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q8

핵심 아이디어

대칭행렬(symmetric matrix)은 이차형식(quadratic form) $ax^2 + 2bxy + cy^2$를 나타내고, 켤레 변환한 행렬(conjugated matrix) $R_{-\alpha}AR_{\alpha}$는 α만큼 회전한 축에서 같은 이차형식을 나타낸다. 이 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)로 만들면 xy항이 사라지므로, 새 축에서 타원(ellipse)은 표준 위치에 놓이고 그 반축(semi-axis)을 바로 읽어 낼 수 있다. 회전(rotation)은 원점으로부터의 거리를 보존하므로, 이 반축이 바로 우리가 구하려는 최대 거리와 최소 거리이다.

풀이

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

소문항 (i)

$C = \cos\alpha$, $S = \sin\alpha$라 하자. 먼저

$$AR_\alpha = \begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ bC + cS & -bS + cC \end{pmatrix},$$

이고, 여기에 왼쪽에서 $R_{-\alpha}$를 곱하면 오른쪽 위 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(-aS + bC) + S(-bS + cC) &= b(C^2 - S^2) - (a - c)SC \\ &= b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a - c)\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

A가 대칭이므로 $R_{-\alpha}AR_\alpha = R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$도 대칭이다(전치(transpose)가 자기 자신이다). 따라서 왼쪽 아래 성분도 같고, 조건 하나로 두 성분이 모두 해결된다. 이 행렬이 대각행렬일 필요충분조건은

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{이므로} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

로 잡을 수 있다. $a = c$이면 조건은 $b\cos 2\alpha = 0$이 되고, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$가 이를 만족한다(또한 $b = 0$이면 A가 이미 대각행렬이므로 어떤 α든 된다).

소문항 (ii)

타원의 방정식을 전개하면

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

이고, 한편 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$이다. 계수를 비교하면

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

이다. 그러면 $a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$이고($0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로),

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

이므로 $\alpha = \theta$는 소문항 (i)의 조건을 만족한다. 즉 $R_{-\theta}AR_\theta$는 대각행렬이다.

대각성분은 소문항 (i)과 같은 곱셈으로 다음과 같이 얻어진다.

$$\text{왼쪽 위 성분} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{오른쪽 아래 성분} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

이번에는 $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$이다. $k = \cot 2\theta$, $\mu = \cos 2\theta$로 놓고 $2SC = \sin 2\theta$, $k\sin 2\theta = \mu$, $C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$, $S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$, $k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$을 이용한다. 오른쪽 아래 성분은

$$\begin{aligned}(1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta.\end{aligned}$$

이다. 완전히 같은 방법으로 왼쪽 위 성분은 $1 + 2\mu + \dfrac{2\mu^2}{1-\mu} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2\theta$이다. 따라서

$$R_{-\theta}AR_\theta = \begin{pmatrix} \cot^2\theta & 0 \\ 0 & \tan^2\theta \end{pmatrix}.$$

생각해 보기 계산을 다시 하지 않고 이 두 성분을 빠르게 확인하는 방법이 있을까?

있다. 켤레 변환은 대각합(trace)과 행렬식(determinant)을 바꾸지 않는다. 여기서 $\det A = ac - b^2 = 1 + 4k^2 - 4k^2 = 1$이고, 실제로 $\cot^2\theta \tan^2\theta = 1$이다. 또 $\operatorname{tr} A = 2 + 4\cot^2 2\theta$이고, $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$이므로

$$\cot^2\theta + \tan^2\theta = (\cot\theta - \tan\theta)^2 + 2 = 4\cot^2 2\theta + 2.$$

이다.

소문항 (iii)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$로 새 좌표를 도입하면, X축과 Y축은 원래 축을 θ만큼 회전한 것이다. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_\theta^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta}$이므로 타원의 방정식은

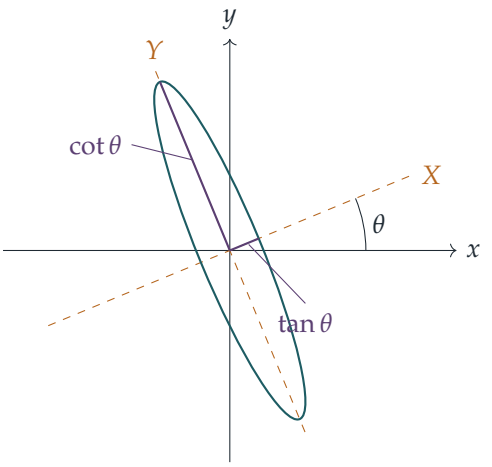
$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta} A R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{즉} \qquad X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1.$$

이 된다. 이 식은 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$에 대해 대칭이므로 중심은 원점이다. 회전은 길이를 보존하므로, 중심에서 한 점까지의 거리는 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$이다.

$0 < \theta < \frac{1}{4}\pi$이므로 $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$이고, 따라서 $\tan^2\theta < \cot^2\theta$이다. 타원 위의 임의의 점에 대해

$$\tan^2\theta\,(X^2 + Y^2) \;\le\; X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1 \;\le\; \cot^2\theta\,(X^2 + Y^2),$$

이므로 $\tan^2\theta \le r^2 \le \cot^2\theta$, 즉 $\tan\theta \le r \le \cot\theta$이다. 왼쪽 부등식은 $X = 0$일 때, 곧 $(X, Y) = (0, \pm\cot\theta)$에서 등호가 성립하고, 오른쪽 부등식은 $Y = 0$일 때, 곧 $(X, Y) = (\pm\tan\theta, 0)$에서 등호가 성립한다. 두 경계가 모두 실제로 달성되므로, 중심에서 타원까지의 최소 거리와 최대 거리는 각각 $\tan\theta$와 $\cot\theta$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.



그림은 $\theta = \frac{1}{8}\pi$인 경우이며, 회전한 축은 점선으로 나타냈다.

검산

- $(0, \pm 1)$은 타원 위의 점이고, $\tan\theta < 1 < \cot\theta$이므로 경계와 모순되지 않는다.
- $\theta = \frac{1}{8}\pi$일 때 원래 좌표에서 장축(major axis)의 끝점은 $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$이다. 이때 $\cot 2\theta = 1$이고, $0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$이 되어 마땅히 그래야 하는 결과가 나온다.
- 수치적으로, 여러 θ 값에 대해 타원을 따라 200 000개의 방향을 조사해 보았더니, $\theta = 0.3$일 때 최소 거리는 0.309336, 최대 거리는 3.232728로 $\tan 0.3$, $\cot 0.3$과 일치했다.

흔한 실수

- xy의 계수를 $2b$가 아니라 b와 비교하는 실수: 이차형식은 $ax^2 + 2bxy + cy^2$이다.
- 어느 회전이 어디에 들어가는지 혼동하는 실수: $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$이면 행벡터는 $\mathbf{X}^\mathsf{T} R_{-\theta}$이고, 이 때문에 $R_{-\theta} A R_\theta$가 나타난다.
- 계수가 큰 쪽의 축이 더 길다고 생각하는 실수: $\cot^2\theta X^2$의 계수가 더 크므로, 타원은 X 방향으로 **짧다**.

STEP 너머

이것은 스펙트럼 정리(spectral theorem)의 2차원 경우이다. 모든 실대칭행렬은 회전으로 대각화할 수 있고, 그 고윳값(eigenvalue)이 대각성분이 된다. 이차형식의 고윳값으로 원뿔

곡선(conic)과 이차곡면(quadric surface)을 분류할 수 있으며, 같은 아이디어가 역학에서는 관성 주축(principal axes of inertia)을, 통계학에서는 주성분(principal components)을 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 매우 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.