풀이

STEP III 1997, 문제 7

순수수학 • e의 무리성

> **STEP III 1997, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q7

핵심 아이디어

급수(series) a_n은 $n!\,\mathrm{e}$에서 정수 부분(whole-number part)을 떼어 내고 남은 것과 정확히 같다. 급수 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$에 $n!$을 곱하면 $k = n$까지의 모든 항은 정수가 되고, 나머지 꼬리(tail)는 a_n이 된다. 등비급수(geometric series) b_n은 a_n을 항별로 쉽게 위에서 누르는 상계(upper bound) 역할을 한다. 꼬리가 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다는 것을 알고 나면, e가 유리수(rational)라고 할 때 어떤 $n!\,\mathrm{e}$는 정수이면서 0이 아닌 소수 부분(fractional part)을 가져야 하는데, 이는 모순이다.

풀이

소문항 (i)

급수 b_n은 첫째항이 $\frac{1}{n+1}$이고 공비(common ratio)가 $r = \frac{1}{n+1}$인 등비급수이다. $n \geq 1$이므로 $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$이고, 따라서 이 급수는 수렴(converge)하며

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

소문항 (ii)

두 급수의 제k항을 각각

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

로 쓰자. u_k의 분모에 있는 k개의 인수 $n+1, n+2, \ldots, n+k$는 각각 $n+1$ 이상이므로 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$이고, 따라서

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{모든} k \geq 1.$$

에 대하여 성립한다. 등호는 $k=1$일 때만 성립한다. $k \geq 2$이면 인수 $n+2$가 $n+1$보다 엄격하게 크므로 $u_k < v_k$이다.

모든 항이 양수이고 수렴하는 급수 b_n의 항으로 위에서 눌리므로, (비교 판정법에 의해) a_n은 수렴하고 $a_n \geq u_1 > 0$이다. 상계에 대해서는

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

이다. 각 항 $v_k - u_k$가 음이 아니기 때문이다. 그러므로 $a_n < b_n = \frac{1}{n}$이고, 둘을 합하면

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

> **생각해 보기** "a_n의 각 항이 b_n의 대응하는 항 이하이다"라는 사실만으로는 왜 엄격한 부등식(strict inequality)을 얻을 수 없을까?

항별로 $\leq$가 성립하면 극한에서 $a_n \leq b_n$만 얻을 수 있다. 무한히 많은 항을 더하면 엄격한 부등식이 등식으로 바뀔 수 있기 때문이다. 그래서 차이가 확실한 양수인 항 하나, 즉 $k=2$를 골라 내고, 나머지 차이는 모두 ≥ 0임을 지적하는 것이다.

소문항 (iii)

급수 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$에 $n!$을 곱하고 $k=n$에서 나누면

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

$k \leq n$이면 $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$은 정수이므로 N은 양의 정수이다. $j \geq 1$에 대하여 $k = n+j$이면

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

이므로 꼬리는 정확히 a_n이다. 따라서 소문항 (ii)와 $n \geq 1$을 이용하면

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

이다. (정수) + ($[0,1)$에 속하는 수) 꼴의 수는 그 정수를 정수 부분으로 가지므로 $[n!\,\mathrm{e}] = N$이고, 따라서

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

소문항 (iv)

귀류법(proof by contradiction)으로, p, q가 양의 정수일 때 $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$라고 가정하자. $n = q$로 잡으면

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

는 정수이므로 자기 자신의 정수 부분과 같고, 소문항 (iii)에서 $a_q = 0$을 얻는다. 그런데 소문항 (ii)에 따르면 $a_q > 0$이다. 이 모순은 e가 무리수(irrational)임을 보여 준다.

(q가 $n!$을 나누므로 $n \geq q$인 어떤 n을 잡아도 똑같이 된다. 요점은 단지 어떤 $n!\,\mathrm{e}$가 정수가 되어야 한다는 것이다.)

검산

$n = 1$일 때 $1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$이므로 소수 부분은 $0.71828\ldots$이고, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$를 더해도 $0.71828\ldots$이 되어 $b_1 = 1$보다 넉넉히 작다. $n = 5$일 때 $a_5 \approx 0.19382$로 $\frac{1}{5}$보다 조금 작다. a_n과 b_n의 첫째항이 같기 때문에, n이 커질수록 이 상계는 상대적으로 더 정밀해진다. 정확한 분수로 컴퓨터 검산을 해 보면 1부터 29까지의 모든 n에 대하여 $0 < a_n < \frac{1}{n}$이고 $[n!\,\mathrm{e}] = N$인 $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$이 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 모든 k에 대하여 $u_k \leq v_k$라는 이유만으로 $a_n < b_n$이라고 주장하는 것. 부등식이 엄격하게 유지되려면 엄격하게 작은 항이 하나(여기서는 $k = 2$) 필요하다.
- $\sum_{k \leq n} n!/k!$이 왜 정수인지 잊는 것. $k \leq n$이면 $k!$이 $n!$을 나누기 때문이다.
- 소문항 (iv)에서 $0 < a_n$만 쓰거나 $a_n < 1$만 쓰는 것. 두 부분이 모두 중요하다. (소문항 (ii)에서 얻은) $a_n < 1$은 a_n이 소수 부분임을 알려 주고, $a_n > 0$은 모순을 만들어 낸다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수임을 보이는 푸리에(Fourier)의 증명이며, 그 틀(정수여야 하는 양이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보이는 것)은 π나 0이 아닌 유리수 $r \neq 0$에 대한 e^r의 무리성 증명을 포함한 많은 무리성 증명의 본보기가 된다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서는 비교 판정법(comparison test)과 e의 급수를 엄밀하게 정당화하고, 이 논증이 성립하는 이유가 $\sum 1/k!$이 수렴하는 속도에 있다는 것을 보게 된다. 즉 e는 어떤 유리수도 가질 수 없을 만큼 분수로 훨씬 잘 근사된다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 급수 쪽을 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 유리수 근사에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.