풀이

STEP III 1997, 문제 6

순수수학 • 체비쇼프 미분방정식

STEP III 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q6

핵심 아이디어

$x = \cos\theta$ 옆에 있는 인수 $1 - x^2$는 한 가지를 떠올리게 한다. 바로 $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$이다. 연쇄법칙(chain rule)을 써서 변수를 신중하게 바꾸면, x에 대한 다루기 힘든 방정식이 θ에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 방정식이 된다. 이 방정식을 풀고 두 부가 조건을 이용하여 상수를 결정한다. 그러면 점화식(recurrence relation)은 모습을 바꾼 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)일 뿐이다. 전체에 걸쳐 n은 음이 아닌 정수이다. 조건 $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$는 이 경우에만 의미가 있다.

풀이

변수 바꾸기

$0 < \theta < \pi$인 $x = \cos\theta$로 놓으면 $\sin\theta > 0$이고 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta = -\sin\theta \neq 0$이다. 기호를 간단히 하기 위해 y_n 대신 y라고 쓴다. 연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

x에 대해 한 번 더 미분하려면, θ에 대해 미분한 다음 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -1/\sin\theta$를 곱한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

이제 $1-x^2=\sin^2\theta$와 $x=\cos\theta$를 이용하여 대입한다.

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y\\ &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.\end{aligned}$$

두 일계도함수 항이 정확히 소거된다. 따라서 주어진 방정식은 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$과 동치이며, 이것이 보이려던 것이다.

? **생각해 보기** 왜 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$는 단순히 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$가 아닐까?

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 $-1/\sin\theta$와 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 곱이기 때문이다. 두 인수가 모두 θ에 의존하므로 곱의 미분법(product rule)에 의해 항이 두 개 생긴다. 이 추가 항이 바로 $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 항을 소거하며, 그래서 문제에 그 항이 들어 있는 것이다.

y_n 구하기

$n\geq 1$일 때 $y''+n^2y=0$의 일반해(general solution)는

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

$n=0$일 때 방정식은 $y''=0$이므로 $y_0=A+B\theta$이다.

$x=1$에서의 조건. $x=1$은 $\theta=0$에 대응하고, $y_n(1)=1$로부터 두 경우 모두 $A=1$이다.

대칭 조건. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로 x를 $-x$로 바꾸는 것은 θ를 $\pi-\theta$로 바꾸는 것과 같고, $\pi-\theta$ 역시 $[0,\pi]$에 속한다. 정수 $n\geq 1$에 대하여

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

따라서 $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$이다. 이것이 모든 θ에 대해 $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$와 같다고 놓으면 $2B\sin n\theta=0$이므로 $B=0$이다. $n=0$일 때 조건은 모든 θ에 대해 $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$가 되고, 이 역시 $B=0$을 강제한다.

그러므로 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{즉,}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

관계식 $\theta=\arccos x$는 $[-1,1]$을 $[0,\pi]$ 위로 보내며, 그래서 이 결과가 $|x|\leq 1$에서 성립한다. 끝점 $x=\pm1$ ($\theta=0,\pi$)은 연속성에 의해 포함된다.

결론 이끌어내기

$n = 0$과 $n = 1$을 대입하면 $y_0 = \cos 0 = 1$이고 $y_1 = \cos\theta = x$이다.

점화식을 얻기 위해 덧셈정리

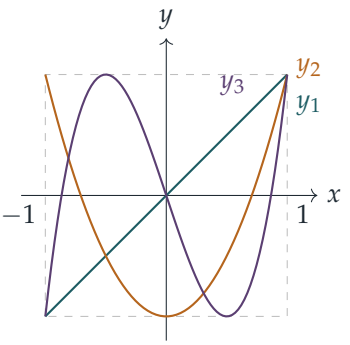
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

를 더한다. 사인 항이 소거되어 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$가 남는다. 이를 x로 나타내면

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$y_0 = 1$과 $y_1 = x$에서 출발하면 점화식은 다항식을 만들어 낸다. $y_2 = 2x^2 - 1$, $y_3 = 4x^3 - 3x$, $y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 등이다.



각 y_n은 코사인이므로 당연히 $[-1, 1]$에서 -1과 1 사이에 머문다.

검산

- $y_2 = 2x^2 - 1$: 이때 $(1-x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2-1) = 0$이다. 즉 $n = 2$일 때의 방정식을 만족하고, $y_2(1) = 1$이며, 짝함수이다.
- y_n의 홀짝성(parity)은 $(-1)^n$과 일치한다. 예를 들어 $y_3 = 4x^3 - 3x$는 홀함수이다.
- 수치적으로 $x = 0.3$일 때 $\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$이다. $y_n = \cos(n\arccos x)$, $0 \leq n \leq 8$에 대해 원래 방정식을 유한 차분(finite difference)으로 확인한 결과 잔차가 10^{-5} 미만이었다.

흔한 실수

- 이계도함수를 구할 때 곱의 미분법을 잊어서 일계도함수 항들이 소거되지 않는 경우.

- $\sin n\theta$ 해를 남겨 두는 경우. 이 해는 미분방정식과 $y_n(1) = 1$ ($\sin 0 = 0$이므로)을 만족하지만, 대칭 조건은 만족하지 않는다. 그 조건은 바로 이 해를 없애기 위해 있는 것이다.
- $n = 0$인 경우를 따로 다루는 것을 잊는 경우. 이때 일반해는 코사인과 사인의 쌍이 아니라 $A + B\theta$이다.

STEP 너머

다항식 y_n은 **체비쇼프 다항식**(*Chebyshev polynomials*) $T_n(x)$이다. 주어진 방정식은 체비쇼프(Chebyshev) 방정식이다. 우리가 버린 두 번째 해 $\sin(n \arccos x)$는 $\sqrt{1 - x^2}$에 다항식을 곱한 것이다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)의 핵심이다. 최고차항의 계수가 1인(monic) n차 다항식 가운데 $2^{1-n}T_n$이 $[-1, 1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작으며, 그래서 T_n의 근이 많은 수치 해법에서 가장 좋은 보간(interpolation) 점이 된다. 이와 같은 방정식의 급수해(series solution)와 거기서 나오는 특수함수에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.