풀이

STEP III 1997, 문제 5

순수수학 • 사이클로이드의 호의 길이

STEP III 1997, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q5

핵심 아이디어

굴러가는 바퀴의 테두리 위의 한 점은 **사이클로이드**(*cycloid*)를 그린다. 바퀴가 돌아간 각으로 그 점의 위치를 나타내기만 하면, 이 문제는 단순한 호의 길이(arc length) 적분이 된다. 바퀴 중심의 운동과 회전각을 이어 주는 것은 미끄러지지 않고 구른다는 조건이며, 반각 공식(half-angle identity)을 쓰면 호의 길이 공식에 있는 제곱근이 깔끔하게 정리된다.

풀이

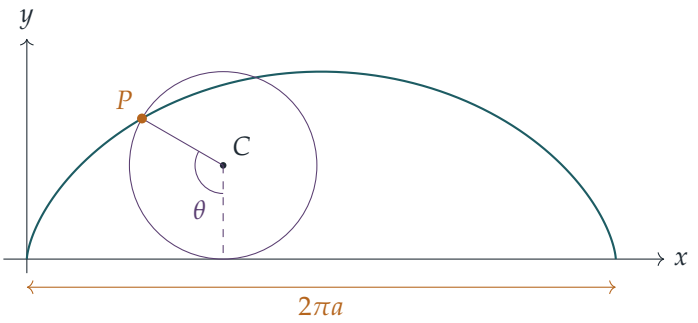
경로 세우기

반지름이 a인 바퀴가 x축을 따라 미끄러지지 않고 구른다고 하자. 표시한 점 P가 원점에서 지면에 닿아 있는 상태에서 출발하고, 바퀴가 돌아간 각(라디안 단위)을 θ라 하자.

미끄러짐이 없으므로 바퀴가 지나간 지면의 길이는 지면에 닿았던 테두리의 길이와 같다. 따라서 중심 C는 거리 $a\theta$만큼 이동하여 $(a\theta,\, a)$에 있다. C를 기준으로 보면, 점 P는 처음에 C의 바로 아래에 있었고 θ만큼 (바퀴가 오른쪽으로 구르므로 시계 방향으로) 돌았다. 따라서 P는 $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$에 있다. 그러므로 한 바퀴 회전에 대하여

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

이다. 그동안 바퀴는 거리 $2\pi a$만큼 앞으로 나아간다.



호의 길이

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

이므로

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$를 이용하였다.

생각해 보기 제곱근을 취하면 $2a\sin\frac{\theta}{2}$인가, 아니면 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$인가? 그리고 여기서 그 차이가 중요한가?

제곱근은 항상 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$이다. $0 \le \theta \le 2\pi$이면 $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$이고, 이 범위에서 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$이므로 정확히 한 바퀴 회전하는 동안에는 절댓값(modulus)을 없앨 수 있다. (더 긴 범위라면 적분을 나누어야 한다.)

따라서 P가 이동한 거리는

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

이다.

비

바퀴가 $2\pi a$만큼 움직이는 동안 테두리 위의 점은 $8a$를 이동하므로, 구하는 비는

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

이다. 이 값은 바퀴의 크기에 의존하지 않는데, 당연히 그래야 한다. 바퀴의 크기를 바꾸면 두 거리가 같은 배율로 바뀌기 때문이다.

검산

- 점은 바퀴보다 더 먼 거리를 이동한다($8a > 2\pi a \approx 6.28a$). 이는 타당하다. 점은 앞으로 나아가면서 **동시에** 위아래로 각각 $2a$씩 움직이기 때문이다. 사실 $8a$는 정확히 지름의 네 배이다.
- 대략적인 한계를 구해 보자. 경로는 $(0,0)$에서 $(\pi a, 2a)$까지 올라갔다가 $(2\pi a, 0)$까지 내려오므로, 그 길이는 적어도 $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$이고 많아야 $2\pi a + 4a \approx 10.28a$이다. 값 $8a$는 그 사이에 넉넉히 들어간다.
- 수치적으로, 바퀴가 구르는 동안 테두리 위의 점을 200 000개의 위치에서 추적하여 직선 구간들의 길이를 더하면 $a = 1$일 때 7.99999999992를 얻는다. 따라서 비는 $0.78539816\ldots = \pi/4$이다.

흔한 실수

- 매개변수 표현(parametrisation)에서 부호를 잘못 쓰는 경우(예를 들어 $x = a(\theta + \sin\theta)$). 이렇게 하면 바퀴에 대하여 뒤로 움직이는 경로가 나온다. $\theta = \pi$에서 확인해 보라. P는 꼭대기인 $(\pi a, 2a)$에 있어야 한다.
- 피적분함수를 $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$인 채로 두고 직접 적분하려는 경우. 반각 공식이 바로 적분을 쉽게 만들어 주는 단계이다.
- 비를 거꾸로 쓰는 경우. 문제는 점의 이동 거리에 대한 바퀴의 이동 거리의 비를 묻고 있으므로 답은 $4/\pi$가 아니라 $\pi/4$이다.

STEP 너머

사이클로이드는 수학에서 가장 유명한 곡선 가운데 하나이다. 이 곡선은 중력 아래에서 두 점 사이를 가장 빠르게 내려가는 곡선인 **최속강하선**(*brachistochrone*)이며, 구슬이 어디에서 출발하든 같은 시간에 바닥에 도달하는 곡선인 **등시곡선**(*tautochrone*)이기도 하다. 두 사실은 모두 변분법(calculus of variations)으로 증명하는데, 이는 대학 1학년이나 2학년의 역학 또는 수리방법론 강의에서 배운다. 이 문제의 호의 길이 계산은 두 증명 모두의 첫 단계이다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.